



Contribution à l'étude des interactions fluide-structure pour l'analyse de l'impact hydrodynamique d'un système de flottabilité d'hélicoptère

Nicolas Malleron

► To cite this version:

Nicolas Malleron. Contribution à l'étude des interactions fluide-structure pour l'analyse de l'impact hydrodynamique d'un système de flottabilité d'hélicoptère. Physique [physics]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2009. Français. NNT : . tel-00457018

HAL Id: tel-00457018

<https://theses.hal.science/tel-00457018>

Submitted on 16 Feb 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ D'AIX-MARSEILLE

THÈSE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille

Spécialité : **Mécanique des fluides**

préparée au laboratoire **IRPHE**

dans le cadre de l'École Doctorale **Sciences pour l'Ingénieur : Mécanique, Physique,
Micro et Nanoélectronique**

présentée et soutenue publiquement
par

Nicolas MALLERON

le 07/04/2009

Titre:

**Contribution à l'étude des interactions fluide-structure
pour l'analyse de l'impact hydrodynamique d'un
système de flottabilité d'hélicoptère**

Directeur de thèse: **Yves-Marie SCOLAN**

Jury

M. Frédéric AUDIER,	Invité
M. Bruno COCHELIN,	Examineur
M. Frédéric DIAS,	Rapporteur
M. Pascal DRAZETIC,	Rapporteur
M. Patrice GUERARD,	Invité
M. Alexander KOROBKIN,	Président du jury
M. Yves-Marie SCOLAN,	Directeur de thèse

Résumé

Le dimensionnement des systèmes de flottabilités d'hélicoptère est encore aujourd'hui un domaine dans lequel des progrès importants restent à accomplir. En effet, un tel système est formé de flotteurs gonflables, déployés avant impact, ne possédant pas de rigidité propre. A l'heure actuelle, le dimensionnement des flotteurs s'effectue en supposant que ceux-ci sont rigides. Pour améliorer les futurs dimensionnements, il apparaît donc important de s'intéresser au problème de l'impact hydro-élastique, *i.e.* au couplage entre les chargements hydrodynamiques et les déformations de la structure. Un modèle hydrodynamique d'impact susceptible d'être couplé à un modèle structural d'élasticité est donc développé.

En remarquant que dans un grand nombre de cas d'applications, le fluide peut être considéré comme incompressible et parfait et que l'écoulement est irrotationnel, le problème peut être formulé en théorie potentielle. L'écoulement fluide autour du corps impactant est alors décrit par un potentiel qui vérifie un problème aux limites. Il peut s'agir du potentiel des déplacements, du potentiel des vitesses ou encore du potentiel des accélérations. La difficulté majeure liée à ce type de problème réside dans le fait que les frontières du domaine fluide, sont des inconnues à part entière du problème, qu'il faut déterminer au même titre que le potentiel de l'écoulement. La méthode la plus couramment utilisée pour faire face à cette difficulté est celle proposée par [Wagner, 1932]. Elle réside en une linéarisation de la surface mouillée et de la surface libre, qui sont toutes deux projetées dans le plan de la surface libre au repos. La détermination de la surface mouillée se résume alors à la connaissance de la position du point (*resp.* de la ligne) de contact de la surface mouillée avec la surface libre du fluide pour des configurations bidimensionnelles (*resp.* tridimensionnelles). Le modèle de Wagner généralisé, introduit par [Zhao *et al.*, 1996], représente un bon compromis entre le modèle de Wagner linéarisé [Wagner, 1932] et une approche complètement non linéaire de type BEM [Zhao *et al.*, 1996]. Seule la surface libre est linéarisée dans une approche de Wagner généralisée. Cette linéarisation en fait un modèle moins "physique" qu'un modèle complètement non linéaire de type BEM. En revanche, la définition exacte de la surface mouillée du corps permet de dépasser un certain nombre de limitations du modèle de Wagner linéarisé. En particulier, l'angle mort, *i.e.* l'angle entre la surface libre et la surface du corps n'est plus limité à une trentaine de degrés. Le modèle est d'abord validé dans le cas rigide, en comparant les résultats obtenus dans le cas de formes classiques (coins, cercle...) à des résultats issus de la littérature. Des formes moins conventionnelles (étraves de navires, formes asymétriques...) sont également étudiées, ainsi que des formes présentant un angle très vif au point de contact initial ou ailleurs, cas rarement évoqué dans la littérature.

Un couplage entre le modèle hydrodynamique et un modèle simple d'élasticité est ensuite proposé. Dans cette approche, la déflexion de la structure est représentée sur une base de modes normaux. Les inconnues du problème structural sont donc restreintes aux poids de chacun des modes considérés. Le couplage fluide-structure qui intervient est un couplage fort, pour

lequel la continuité des vitesses et des contraintes à l'interface fluide-solide doit être vérifiée à tout instant. Un algorithme de résolution de ce problème non linéaire couplé est proposé et appliqué à des formes simples de type coin, munis de différentes conditions aux limites. Les résultats sont comparés à des résultats de la littérature, en particulier à des résultats issus de la théorie de Wagner linéarisée.

Les résultats de deux campagnes expérimentales sont présentés. La première, plutôt d'ordre académique, a été réalisée dans le canal à houle de l'Ecole Centrale de Marseille. Il s'agit d'essais de lâchers d'un ballon sphérique souple. La grande souplesse de ce ballons rend possible l'observation de déformations importantes lors de son impact sur l'eau. On montre également que deux phases peuvent être distinguées. La première phase, très rapide, consiste en un aplatissement de la surface mouillée. Elle est immédiatement suivie par une phase d'oscillation de la membrane élastique de la sphère. La première phase, qui est la seule phase d'impact à proprement parler, est caractérisée par un couplage fluide-structure fort, et par le fait que la pression interne n'a que peu d'influence sur l'évolution du système. Des modèles hydrodynamiques classiques permettent de rendre compte du comportement du système de manière satisfaisante au cours de cette phase.

La deuxième campagne expérimentale porte sur l'étude d'un système réel de flottabilité d'hélicoptère dans un bassin d'essai de grande dimension. Ce système, monté sur une maquette représentative d'un hélicoptère en terme de masse, est instrumenté de manière à mesurer les efforts mis en jeu. Ce dispositif est lâché d'une hauteur donnée dans le bassin. On montre qu'en approximant simplement les flotteurs par des cylindres, on arrive à prédire des valeurs d'efforts satisfaisantes.

Abstract

The dimensioning procedure of helicopter floatability systems remains very challenging and several improvements must be performed in this domain. In fact, such a system is made of floats, inflated just before impact. These floats do not present any rigidity. In spite of this fact, computation are done by assuming that the floats are rigid. It hence appears to be very important to focus on the influence of hydroelasticity in the impact problem. An hydrodynamic model is hence developed first, before to be coupled with an elastic structural one.

By noting that in many applications, the fluid can be considered as incompressible and perfect, and that the flow is irrotational, the problem can be formulated in potential theory. The flow around the impacting body is then described by a potential, which verify a boundary value problem. It can be either displacement potential, velocity potential or acceleration potential. In every case, the main difficulty lies in the fact that boundaries of the different domains (solid, fluid and air) are unknown in advance. They must hence be determined, as well as the potential itself and considered as unknowns of the problem. The more commonly used method is those developed by Wagner [Wagner, 1932]. It lies on a linearization of both the wetted and free surface, that are projected on the initial free surface at rest. In that case, determination of the contact point reduces to the so called “Wagner condition”, which prescribes the continuity of the displacement between fluid particles lying on the free and wetted surfaces. The generalized Wagner model, introduced by [Zhao *et al.*, 1996], represents a good compromise between the linearized Wagner model and a fully non linearized approach of BEM type. The generalized Wagner approach only requires the free surface to be linearized. This linearization makes this model less physical than the BEM one but the exact definition of the wetted surface allows to avoid some limitations of the linearized Wagner model. In particular, the deadrise angle, *i.e.* the angle between the free and wetted surface is not limited to 30 degrees anymore. This model is first validated in a rigid case, by comparing the obtained results in some classical cases (circular cylinder or wedges) to the well known results of the literature. Less classical shapes are then considered (asymmetric shapes, bow section) as well as some pathological shapes, presenting sharp edges at the apex or elsewhere.

A coupling between the hydrodynamic model and a simple elasticity model for the structure is proposed. In this approach, deflection of the structure is represented on a base made of normal modes. The only unknowns of the structural problem are hence the different mode weights. The considered coupling is a strong one, since both stress and velocity continuity must be enforced at each times. An algorithm of resolution for this non linear coupled problem is proposed and applied to simple wedge shapes, on which various boundary conditions are prescribed. Results are compared to results obtained thanks to coupled linearized Wagner models.

The results of two experimental campaigns are presented. The first campaign is an academic one. Drop tests, with an elastic spherical ball are performed in the flume of “Ecole Centrale de

Marseille". Large deflections are observed. It is shown that two phases can be distinguished. During the first one, the wetted surface of the ball becomes flat. This phase has a very short duration and it is followed by an oscillation phase that is not easily modelled. On the contrary, classical models can be accurately used to predict the behaviour of the system during the impact phase.

The latter experimental campaign deals with a real helicopter floatability system and took place in a large basin. This system, set up on a model which is supposed to be representative of an helicopter in terms of mass, is instrumented. The aim of the instrumentation is to measure the loads acting on the floats during several drop tests. It is shown that the loads can be predicted accurately with numerical models by simply approximating the floats by cylinders.

Remerciements

Un grand merci aux rapporteurs du présent travail, Pascal Drazétic et Frédéric Dias, au président du jury, Alexander Korobkin ainsi qu'à Bruno Cochelin.

Un non moins grand merci à Yves-Marie Scolan, directeur de cette thèse qui m'a initié (il était temps!) à la pâte à modeler des transformations conformes, au ballon sauteur (dont je pensais benoîtement qu'il s'agissait d'un jouet pour enfant...) mais aussi à des activités plus sérieuses, dont la liste exhaustive ne saurait être dressée ici (les pages suivantes y pourvoiront). Il doit savoir que ces trois années ont été les plus formatrices de toutes celles que j'ai passées sur les bancs (plus molletonnés au fil des ans) de l'université.

Je remercie également tous ceux qui, à divers titres, ont contribué à ce que cette thèse se déroule dans d'excellentes conditions :

- les personnels d'Eurocopter qui ont oeuvré pour qu'elle ait tout simplement lieu (Vincent Lassus et Patrice Guérard), ainsi que ceux qui ont ensuite été mes interlocuteurs (Axelle de Gelas, Frédéric Audier) et de précieux conseils au long de ces trois années.
- les enseignants chercheurs de l'équipe hydrodynamique de l'Ecole Centrale de Marseille : Olivier Kimmoun, Bernard Molin et Fabien Rémy, pour la bonne humeur qu'ils font régner au sein du laboratoire. Mention spéciale navigateur expert à Olivier auquel revient tout le mérite de n'avoir jamais perdu le nord lors des sorties VTT qui nous ont vus partir à l'assaut des sommets locaux de plus de 400 m... J'ai cité Garlaban, Etoile, Mont Julien. Autant de noms qui, d'Aubagne à Septèmes-les-vallons, font trembler les cyclistes (du dimanche) les plus aguerris! On pardonnera les Lyonnais et assimilés de ne pas connaître, "peuchère"! Fabien a également mérité sa mention de coach sportif. Si, à son contact, je n'ai guère progressé au volley, je sais au moins compter jusqu'au 5ème métatarse du pied droit...
- les doctorants et stagiaires qui se sont succédés au cours de ces trois années. Encore une mention très spéciale à Séverin Halbout, colocataire du dépotoire P120, cofondateur du label "thésard durable" et complice, le lecteur attentif l'aura compris, du meilleur comme du pire. Je suis sûr que cette fructueuse collaboration ne s'arrêtera pas là...

Merci enfin à Delphine Pelisson, la meilleure supportrice qu'il m'ait jamais été donné d'avoir, dont j'espère qu'elle me supportera encore de longues années...

“L’aubre que noun porto fru dou mens presto soun ounbro”

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte	1
1.2	Motivations et problématique	5
1.3	Plan de l'étude	5
2	Une revue des modèles hydrodynamiques d'impact	9
2.1	Résolution des équations de Navier-Stokes ou d'Euler	9
2.2	Modèles en théorie potentielle	16
2.2.1	Les modèles linéarisés	18
2.2.2	Modèle de Vorus	26
2.2.3	Modèle de Wagner généralisé	26
2.2.4	Résolution du problème complètement non linéaire	27
2.3	Couplage hydro-élastique	30
2.4	Comparaison du coût CPU des différentes méthodes	30
2.5	Conclusions, choix effectués	31
3	A generalized Wagner model, theory and applications	33
3.1	Introduction	33
3.2	Mapping of the computational domain	36
3.2.1	Step 1 : removing the step	36
3.2.2	Step 2 : continuation of the solution in the upper half plane	38
3.2.3	Step 3 : removing the corners	38
3.2.4	Step 4 : transformation into an unit circle	39
3.2.5	Step 5 : transformation into a flat plate	40
3.2.6	Jacobian of the total conformal mapping	41
3.3	Boundary Value Problem	41
3.3.1	Solution of the BVP in the w -plane	42
3.3.2	Computation of the flow around the section	42
3.4	Numerical schemes	43
3.4.1	Computation of the wetting correction c_1 and c_2	43
3.4.2	Computation of the pressure distribution	47
3.4.3	Hydrodynamic force	49
3.4.4	Capsizing sections	50
3.5	Applications and results	52
3.5.1	Asymmetric wedge at constant velocity entry	52
3.5.2	Symmetric wedge at constant velocity entry	55
3.5.3	Other impacting shapes and some limitations of the model	57
3.5.4	Symmetric wedge in free fall	63
3.5.5	Asymmetric wedge in free fall	65

3.5.6	Capsizing wedge	66
3.6	Conclusions	67
4	Some particular aspects of the Generalized Wagner model	69
4.1	Non viscous flow separation	69
4.1.1	Influence of the entry velocity	70
4.1.2	Influence of the aspect ratio	71
4.1.3	Influence of a variable entry velocity	73
4.1.4	How to modelize flow separation ?	74
4.2	Mass conservation	77
4.3	Analysis of the flow at the spray root	79
4.4	Impact of section with a sharp edge at the apex	82
4.4.1	Computation of the wetting correction	82
4.4.2	Impact of a tulip-shape section	84
4.4.3	Sinus-like form	86
4.5	Conclusions	96
5	Generalized Wagner model for 2D symmetric and elastic bodies	97
5.1	Introduction	97
5.2	Boundary value problem	97
5.3	Hydrodynamic problem	99
5.4	Coupled problem	101
5.5	Applications	104
5.5.1	Wedge clamped with boundary condition 1	105
5.5.2	Influence of the thickness	114
5.5.3	Influence of the deadrise angle	115
5.5.4	Influence of the impact velocity	118
5.5.5	Influence of the deformations on the loads	119
5.5.6	Extension to the problems with BC 2 and 3	122
5.6	Conclusions	125
6	Experimental study : hydroelastic impact of an elastic sphere	127
6.1	Introduction	127
6.2	Experimental setup	127
6.2.1	Facilities	127
6.2.2	Characteristics of the ball	128
6.3	Experimental results	132
6.3.1	Typical behaviour of the ball	132
6.3.2	Dimensional analysis	135
6.3.3	Repeatability	136
6.3.4	Variabilities	138
6.4	Comparison to numerical models	141
6.4.1	Coupled linearized Wagner model	141
6.4.2	Kinematics	142
6.4.3	Deformations	144
6.5	Conclusions and perspectives	146

7 Etude expérimentale : impact d'un système de flottabilité d'hélicoptère	147
7.1 Introduction	147
7.2 Le dispositif expérimental	148
7.2.1 Instrumentation	150
7.3 Résultats	154
7.3.1 Essais réalisés	155
7.3.2 Essais préliminaires	156
7.3.3 Etude descriptive	158
7.3.4 Etude des variabilités	163
7.4 Comparaison à des modèles théoriques d'impact	167
7.4.1 Modèle de Wagner linéarisé - solution analytique (SA)	167
7.4.2 Solution numérique du modèle de Wagner linéarisé (SN)	168
7.5 Conclusions et perspectives	172
Appendices	179
A Schwarz-Christoffel transformation of the step	179
B Computation of the flow	181
B.0.1 Computation of the velocity potential ϕ on the body surface	181
B.0.2 Computation of the stream function ψ on the free surface	181
B.0.3 Computation of vertical velocity $\phi_{,y}$ on the free surface	182
B.0.4 Representation of I_n and L_n	182
C Glauert's integral	185
D From Chebyshev series to monomial series	187
E Wetting correction in a linearized Wagner model for asymmetric sections	189

Chapitre 1

Introduction

L'objet de ce mémoire est de présenter les travaux réalisés dans le cadre d'une thèse CIFRE, financée par l'ANRT (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie) et la société EUROCOPTER, fabricant d'hélicoptères. Cette thèse, préparée à l'Ecole Centrale de Marseille présente un modèle théorique d'impact hydrodynamique pour des corps rigides et déformables, ainsi que des résultats expérimentaux.

1.1 Contexte

Le terme d'impact hydrodynamique définit le choc entre une structure et la surface d'un liquide, généralement de l'eau. En ingénierie navale, on est fréquemment confronté au problème du tossage (slamming en anglais). Ce terme est utilisé pour décrire le mouvement d'un bateau lorsque l'étrave de celui-ci a tendance à effectuer des mouvements verticaux brutaux et à percuter violemment la surface de la mer. Ce phénomène est illustré en figure 1.1.



FIG. 1.1 – Illustration du phénomène de tossage (<http://www.hydrolance.net>)

Une revue détaillée sur le phénomène de slamming et les problèmes y ayant trait a été réalisée par [Faltinsen *et al.*, 2004]. Ce phénomène est à l'origine d'efforts hydrodynamiques très importants, se produisant pendant une durée très courte. Les pressions engendrées sont donc susceptibles de causer localement des dommages importants, voire irrémediables (cf. figure 1.2). De tels dommages, s'ils conduisent jusqu'au naufrage, peuvent donc avoir des conséquences dramatiques (pertes humaines, marée noire...) Si le scénario du naufrage constitue bien évidem-

ment un cas extrême, il faut par ailleurs être conscient du fait que les efforts globaux liés au slamming, affectent de manière importante la tenue à la mer des navires.



FIG. 1.2 – Rupture de la structure du pétrolier “Prestige” consécutivement à une tempête en novembre 2002 (<http://www.hydrolance.net>)

Les concepteurs de navires ne peuvent donc résolument pas s’affranchir de la prise en compte du slamming. Néanmoins, le domaine de la construction navale n’est pas le seul concerné. Cette prise en compte est en effet nécessaire lors du dimensionnement de toute structure offshore. A plus forte raison lorsqu’il s’agit de structures fixes, qui vont subir pendant des années des états de mers très variés. On pense en particulier aux plates formes d’exploitation des gisements (figure 1.3).

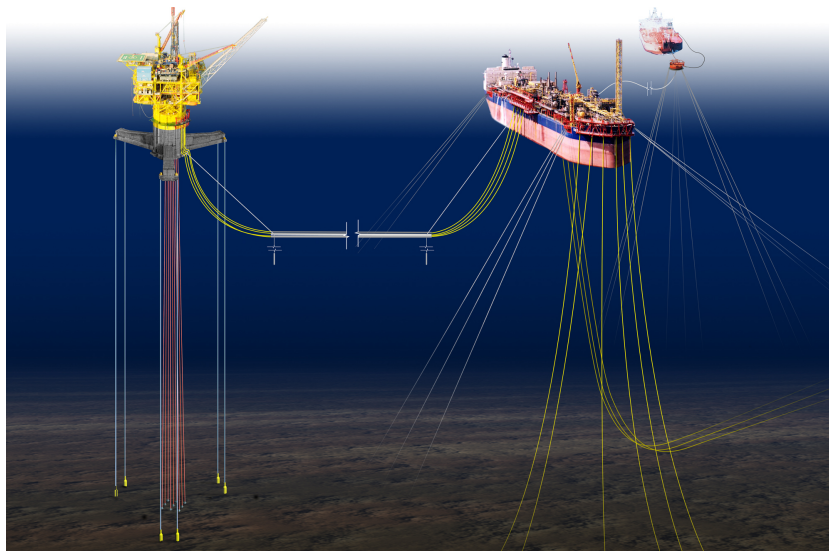


FIG. 1.3 – Plate-forme d’exploitation pétrolière et FPSO (<http://www.atlantia.com>)

Un autre exemple d’impact hydrodynamique est lié au ballotement (sloshing) dans un réservoir partiellement rempli. Dans ce cas, le liquide contenu dans le réservoir frappe la paroi interne par vagues successives, ce qui, à partir d’un certain niveau d’effort, engendre une fatigue de la structure pouvant conduire à la rupture. On est particulièrement attentif à ce problème lors de la conception des navires destinés au transport du Gaz Naturel Liquéfié (LNG pour Liquid Natural Gas, voir figure 1.4), de part les quantités de fluide transportées (plus de 100000

m^3) et les risques que comporterait une fuite. Ce problème apparaît également dans le cas des systèmes flottants de production, de stockage et de déchargement d'hydrocarbure (FPSO, voir figure 1.3).



FIG. 1.4 – Navires destinés au transport du Gaz Naturel Liquéfié. Images téléchargées depuis les sites <http://www.bp.com> et <http://www.memagazine.org>

Enfin, l'amerrissage d'aéronefs constitue un domaine d'application de l'impact hydrodynamique qui vient moins naturellement à l'esprit. Dans ce cas précis, on utilise alors la dénomination de “ditching”. Une revue des travaux sur l'impact hydrodynamique, dans l'optique de traiter du ditching est donnée par [Seddon and Moatamedi, 2006]. Il peut s'agir d'engins spatiaux comme dans le cas de la capsule Gemini (figure 1.5), mais aussi d'engins terrestres, en particulier d'hélicoptères.

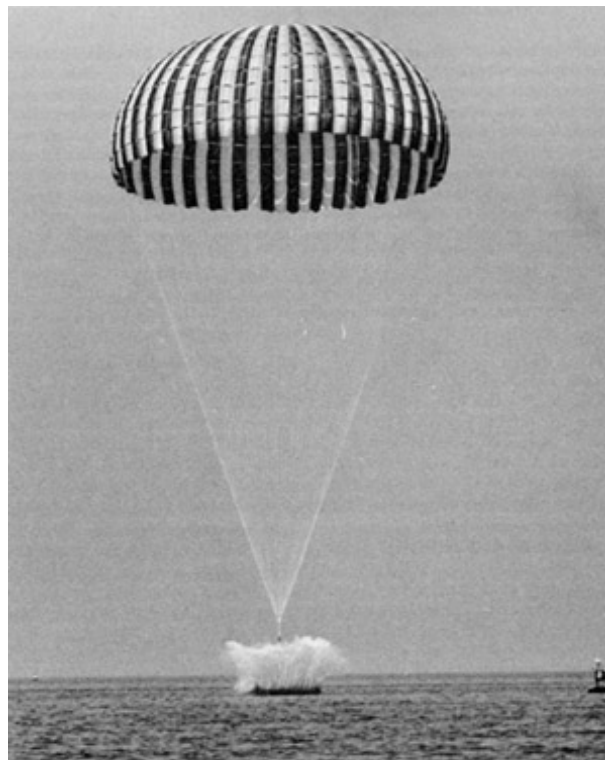


FIG. 1.5 – Test de l'impact sur l'eau de la capsule Gemini (<http://history.nasa.gov>)

Même si les hélicoptères modernes sont relativement sûrs et que l'amerrissage forcé est

une procédure assez rare, c'est un scénario qui ne peut non seulement pas être négligé par les constructeurs d'hélicoptères mais qui fait de plus l'objet d'une réglementation particulière. Cela est dû notamment au fait que certains hélicoptères sont fréquemment utilisés au dessus de l'eau. On pense en particulier aux activités offshore ou militaires. En pratique, 39% des crashes dans l'US Navy se produisent à la surface de l'eau. Pour parer à cette éventualité, les hélicoptères sont donc équipés de flotteurs, qui sont gonflés en cas d'amerrissage. La figure 1.6 montre un exemple de système de flottabilité sur l'hélicoptère militaire NH90.



FIG. 1.6 – Système de flottabilité de l'hélicoptère militaire NH90 (photos Eurocopter)

L'intérêt d'un tel système est double. Dans un premier temps, il sert à amortir l'impact de l'aéronef. Il est en effet essentiel de garantir l'intégrité de celui-ci afin de pourvoir à la sécurité de l'équipage. Le système de flottabilité permet ensuite d'assurer la flottabilité à proprement parler et donc de laisser le temps à l'équipage d'évacuer l'appareil avant un éventuel retournement (voir figure 1.7).



FIG. 1.7 – A gauche : Formation des personnels navigants à l'amerrissage d'urgence (<http://www.safetycenter.navy.mil>). A droite : Hélicoptère non équipé de système de flottabilité (<http://www.mvgazette.com/>)

1.2 Motivations et problématique

En pratique, notre connaissance concernant le comportement des flotteurs durant l'impact est limitée. Le dimensionnement des flotteurs se fait en supposant que ceux-ci sont rigides. Or, le matériau utilisé pour réaliser les flotteurs est proche de celui des bateaux gonflables de type "Zodiac". En conséquence, on doit s'attendre à ce que les déformations qui apparaissent au cours de l'impact soient importantes. C'est pourquoi une modélisation fine des phénomènes qui rentrent en jeu lors de l'impact nécessite la prise en compte de l'élasticité des flotteurs. Pour améliorer les futurs dimensionnements, il apparaît donc très important de s'intéresser au problème de l'impact hydro-élastique, *i.e.* au couplage entre les chargements hydrodynamiques et les déformations de la structure. Si la modélisation de la structure n'est a priori pas un problème en soi, la modélisation du fluide est en revanche plus compliquée. Le but de cette thèse va donc être dans un premier temps de proposer un modèle hydrodynamique d'impact susceptible d'être couplé à un modèle structurel d'élasticité.

1.3 Plan de l'étude

Chapitre 2

Le chapitre 2 présente une revue bibliographique des modèles d'impact. Les modèles dits "CFD" pour Computational Fluid Dynamic y sont d'abord abordés. Ce type d'approche permet de résoudre les équations de Navier-Stokes ou d'Euler sans procéder à aucune linéarisation. Elles permettent de capter un certain nombre de phénomènes physiques qui peuvent intervenir dans les problèmes d'impact (séparation d'écoulement, cavitation, effets de la compressibilité, modélisation des jets...). Si l'on souhaite s'affranchir des temps de calcul importants qu'engendrent généralement les méthodes CFD, des modèles alternatifs peuvent également être mis en oeuvre. En remarquant que dans un grand nombre de cas d'applications, le fluide peut être considéré comme incompressible et parfait et que l'écoulement est irrotationnel, le problème peut être formulé en théorie potentielle. L'écoulement fluide autour du corps impactant est alors décrit par un potentiel qui vérifie un problème aux limites. Il peut s'agir du potentiel des déplacements, du potentiel des vitesses ou encore du potentiel des accélérations. La difficulté majeure liée à ce type de problème réside dans le fait que les frontières du domaine fluide, sont des inconnues à part entière du problème, qu'il faut déterminer au même titre que le potentiel de l'écoulement. C'est dans ce cadre que s'inscrit la présente étude. Une revue des modèles d'impact en théorie potentielle est proposée. Dans certains cas, des linéarisations permettent d'obtenir la solution du problème de manière totalement analytique. On peut également choisir de résoudre le problème non linéaire complet à l'aide de méthode numérique de type BEM pour Boundary Element Method.

Chapitre 3

Le chapitre 3 présente, sous un angle théorique, un modèle hydrodynamique d'impact "intermédiaire" entre le modèle classique de Wagner linéarisé [Wagner, 1932] qui est le plus souvent utilisé et une approche complètement non linéaire de type BEM [Zhao *et al.*, 1996]. Dans ce modèle, dit de Wagner généralisé, introduit par [Zhao *et al.*, 1996], seule la surface libre est linéarisée. Les jets qui apparaissent au cours de l'impact ne sont pas pris en compte. Les effets d'une éventuelle séparation de l'écoulement ne sont donc pas intégrés à ce modèle. En revanche, la définition exacte de la surface mouillée du corps est utilisée, ce qui permet d'aller au delà

d'un certain nombre de limitations du modèle de Wagner linéarisé. En particulier, l'angle mort, *i.e.* l'angle entre la surface libre et la surface du corps n'est plus limité à une trentaine de degrés. On ne s'intéresse dans cette partie qu'au problème d'un corps impactant rigide. Le modèle est validé dans ce cas, en comparant les résultats obtenus dans le cas de formes classiques (coins, cercle...) à des résultats issus de la littérature. Des formes moins conventionnelles (étraves de navires, formes asymétriques,...) sont également étudiées.

Chapitre 4

Le chapitre 4 étend le précédent modèle à des formes présentant des caractéristiques pathologiques. En particulier, le cas de formes présentant un angle très vif au point de contact initial, est rarement évoqué dans la littérature. Dans ce cas, lorsque l'angle au point de contact tend vers 90 degrés, la vitesse d'expansion de la surface mouillée tend à s'annuler. On propose donc dans cette section une manière de prendre correctement en compte ce comportement particulier. On se concentre ensuite sur les problèmes de conservation de la masse et de l'énergie. La linéarisation de la surface libre qui est utilisée procède d'une démarche complètement artificielle. Celle-ci est en effet approchée par une ligne horizontale, émanant du point de contact entre surface libre et surface mouillée. La position non linéarisée de la surface libre est recalculée *a posteriori*. On ne s'attend donc *a priori* pas à ce que ce modèle présente de bonnes propriétés par rapport à la conservation de la masse. On montre pourtant de manière théorique que la masse est conservée. Des simulations montrent que cette propriété est bien vérifiée en pratique. La question de la conservation de l'énergie est plus délicate. Si de faibles quantités de matière sont évacuées dans les jets, leur vitesse d'expulsion est très importante. En conséquence, l'énergie cinétique des jets ne peut être négligée. Le fait de tronquer ces jets ruine donc tout espoir de voir le modèle vérifier une quelconque loi de conservation de l'énergie. De plus, ce type de modèle ne se prête pas facilement à un raccordement asymptotique, à l'inverse du modèle de Wagner linéarisé. A défaut, une méthode d'évaluation de l'énergie qui est perdue dans le jet, et donc de l'instant à partir duquel la conservation de l'énergie n'est plus respectée, est proposée.

Chapitre 5

Le chapitre 5 propose un couplage entre le modèle hydrodynamique et un modèle simple d'élasticité. Dans cette approche, la déflexion de la structure est représentée sur une base de modes normaux. Les fonctions de formes dépendent de la forme considérée, ainsi que des conditions aux limites qui lui sont appliquées. Les inconnues du problème structurel sont donc restreintes aux poids de chacun des modes considérés. Le couplage fluide-structure qui intervient est un couplage fort, dans lequel la continuité des vitesses et des contraintes à l'interface fluide-solide doit être vérifiée à tout instant. Un algorithme de résolution de ce problème non linéaire couplé est donc proposé et appliqué à des formes simples de type coin, munis de différentes conditions aux limites. Une étude paramétrique est menée au cours de laquelle l'influence de l'épaisseur et de la géométrie de la section sont évaluées. Les résultats sont comparés à des résultats de la littérature, en particulier à des résultats issus de la théorie de Wagner linéarisée [Scolan, 2004].

Chapitre 6

Le chapitre 6 présente les résultats expérimentaux obtenus lors d'essais d'impact s'intéressant à l'impact d'une sphère élastique sur l'eau. On montre, par une étude dimensionnelle et

l'analyse des résultats expérimentaux, que deux phases peuvent être distinguées au cours de cet impact. La première phase, très rapide, consiste en un aplatissement de la surface mouillée. Elle est immédiatement suivie par une phase d'oscillation de la membrane élastique de la sphère. La première phase, qui est la seule phase d'impact à proprement parler, est caractérisée par un couplage fluide-structure fort, et par le fait que la pression interne n'a que peu d'influence sur l'évolution du système. Un modèle de Wagner linéarisé est utilisé pour rendre compte de l'aplatissement de la sphère de manière satisfaisante. La phase d'oscillation se caractérise elle par un rôle important de la pression interne et par un échange rapide d'énergie entre le fluide et la structure. La phase de sortie d'eau n'est pas étudiée ici.

Chapitre 7

Le chapitre 7 rend compte des essais réalisés sur un système réel de flottabilité d'hélicoptère dans un bassin d'essai de grande dimension. Le dépouillement de ces essais permet de donner des ordres de grandeur pour les efforts encaissés par ce système. Des modèles numériques simples sont mis en oeuvre. On montre qu'en approximant simplement les flotteurs par des cylindres, on arrive à prédire des valeurs d'efforts satisfaisantes aux premiers instants de l'impact. Les efforts étant précisément maximum à ces instants, il en découle une bonne évaluation des maximums d'effort.

Chapitre 2

Une revue des modèles hydrodynamiques d'impact

On considère l'impact d'un corps, a priori de forme quelconque, et éventuellement déformable, sur la surface libre d'un fluide initialement au repos. Pour résoudre ce problème,

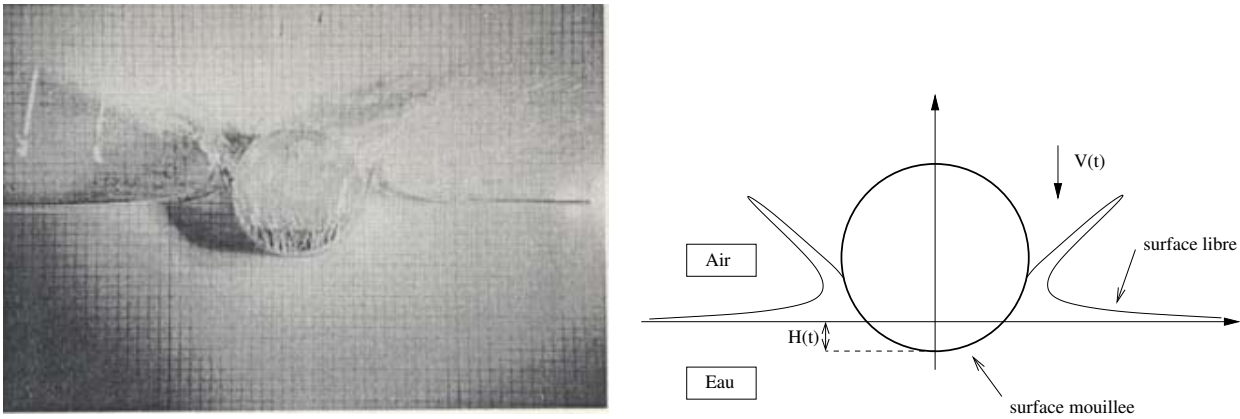


FIG. 2.1 – Impact d'une section de cylindre circulaire [Greenhow and Lin, 1983])

schématisé en figure 2.1, on distingue deux grandes classes de méthodes : les méthodes qui se proposent de résoudre les équations de Navier-Stokes ou d'Euler, que l'on regroupe généralement sous la dénomination de méthodes CFD pour Computational Fluid Dynamics, et les méthodes qui utilisent une formulation en théorie potentielle.

2.1 Résolution des équations de Navier-Stokes ou d'Euler

Dans ce type de formulation, les inconnues du problème sont la vitesse des particules fluides \mathbf{u} et la pression p . Sous une forme lagrangienne, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\mathbf{u}), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p) + \mathbf{g}, \end{cases} \quad (2.1)$$

avec ρ la masse volumique du fluide et \mathbf{g} l'accélération de la pesanteur. Ici et dans toute la suite, les vecteurs sont notés en caractère gras. Les méthodes basées sur la résolution des équations

de Navier-Stokes ou d'Euler sont toutes des méthodes numériques. On en distingue principalement quatre pouvant être utilisées pour résoudre le problème de l'impact hydrodynamique :

- la plus connue est la méthode SPH (acronyme de Smoothed Particle Hydrodynamics). Il s'agit d'une méthode relativement récente, imaginée par [Lucy, 1977] et développée par [Monaghan, 1994] et [Benz, 1989] pour des applications dans le domaine de l'astronomie. Le domaine physique considéré est discrétisé en particules, dont le mouvement est régi par les équations de Navier-Stokes ou d'Euler. Il s'agit donc d'une méthode purement Lagrangienne, alors que les méthodes qui sont présentées par la suite sont des méthodes Eulériennes. Ces équations sont écrites sous une forme conservative. Dans un cas bidimensionnel, la forme conservative des équations d'Euler peut s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$L(f) + \text{div}(F(x, t, f)) = S_f, \quad (2.2)$$

où $f = (\rho, \rho u_x, \rho u_y)$ est le vecteur des inconnues et $S_f = (0, 0, \rho g)$ le terme source. F représente le flux donné par $F_x = (0, p, 0)$ ou $F_y = (0, 0, p)$ selon que l'on considère la loi de conservation de la quantité de mouvement ρu_x ou ρu_y . u_x et u_y désignent respectivement les composantes horizontales et verticales du vecteur \mathbf{u} . L est un opérateur de transport qui s'exprime en 2D :

$$L(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x f) + \frac{\partial}{\partial y}(u_y f) \quad (2.3)$$

Dans le cas de l'impact hydrodynamique, deux domaines doivent être considérés : le fluide et le corps impactant. Sur un domaine Ω donné, le principe de la méthode SPH repose sur l'approximation du champ inconnu \mathbf{f} sous une forme intégrale :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\Omega. \quad (2.4)$$

δ est la fonction Dirac pouvant être approchée par une fonction de lissage, notée $H(x, h)$, à support borné, centré en x et de longueur h . D'un point de vue physique, h représente la longueur d'influence de chaque particule. Si on note $\omega_i(t) = m_i/\rho_i$ avec ρ_i (resp. m_i) la masse volumique (resp. la masse de la i -ème particule), l'intégrale (2.4) peut être approchée par une formule de quadrature. Par exemple, une formule de Monte-Carlo permet d'écrire :

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \sum_i \omega_i(t) \mathbf{f}(\mathbf{r}_i(t)) H(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i(t), h). \quad (2.5)$$

Puisque les particules se déplacent au cours du temps, la discrétisation en espace ainsi que les poids $\omega_i(t)$ sont des fonctions du temps. L'approximation (2.5), appliquée au système continu d'équation formé par les lois de conservation de masse, d'énergie et de quantité de mouvement, conduit à l'écriture d'un système discret équivalent. Une loi d'état est utilisée pour fermer le système discret qui découle de la formulation SPH. Un certain nombre d'exemples d'application des méthodes SPH peut être trouvé dans [Lacome, 1998], [Rompteaux and Vila, 1999], [Fontaine, 2000], [Gallet, 2001] ou encore [Pentecote *et al.*, 2003]. La méthode SPH est généralement couplée avec un modèle élément fini (FEM) de la structure via une méthode classique de pénalisation. Dans [Potapov *et al.*, 2008], la structure est également modélisée par une méthode SPH et couplée au modèle SPH décrivant le fluide.

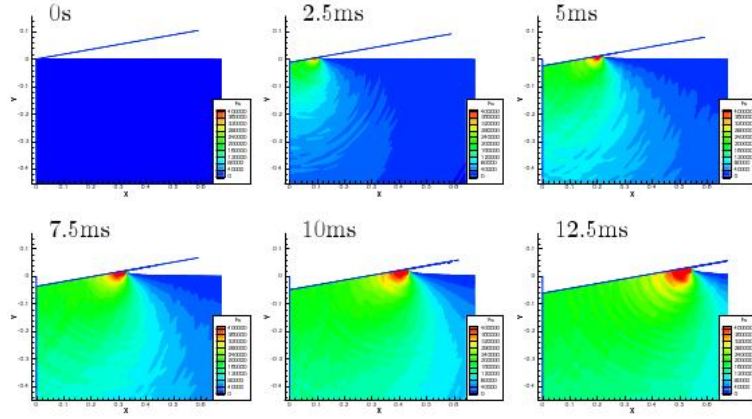


FIG. 2.2 – Cartes de pression obtenues par une modélisation SPH de l'impact à une vitesse $V = 5m.s^{-1}$ d'un coin d'angle mort 10° à la surface libre d'un fluide (d'après [Deuff, 2007])

Les résultats fournis par une méthode SPH sont en général cohérents, même si des oscillations apparaissent sur les chargements, en particulier sur la pression (cf. fig. 2.3).

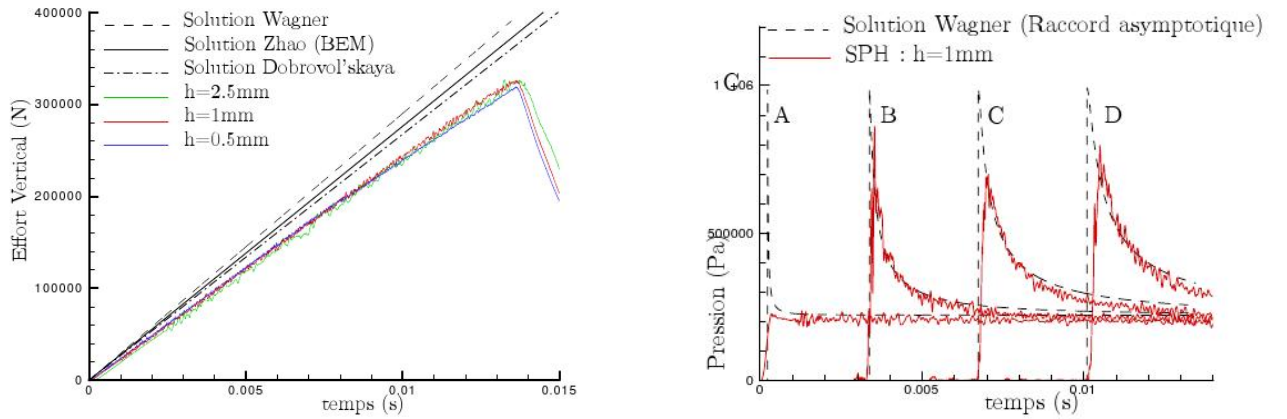


FIG. 2.3 – Effort (gauche) et distribution de pression (droite) agissant sur un coin d'angle mort 10° (d'après [Deuff, 2007]). Les efforts calculés par SPH sont comparés aux solutions de [Wagner, 1932], [Zhao *et al.*, 1996] et [Dobrovol'skaya, 1969].

Le coût de ces méthodes est toutefois très élevé (cf. section 2.4), en particulier pour des configurations tridimensionnelles (voir [Maruzewski *et al.*, 2008] pour le cas d'une sphère par exemple). La précision de la solution est en effet directement liée au nombre de particules employées pour la discrétisation.

Une revue bibliographique complète concernant le méthode SPH est notamment présentée dans [Deuff, 2007]. Le principe de la méthode SPH y est également particulièrement bien détaillé.

- la méthode Volumes Finis (VF), appliquée à des maillages non structurés, permet de traiter de l'écoulement autour d'un corps de forme quelconque, lui même en mouvement. Une telle méthode nécessite l'utilisation d'un maillage devant s'adapter au mouvement du corps solide. Une stratégie de remaillage automatique est donc mise en œuvre tout au long de la simulation. Le mouvement des mailles doit donc être suivi de manière continue.

Un bon exemple d'application au cas de l'impact est présenté par [Leroy, 2004]. Il utilise le code de calcul ISIS de l'Ecole Centrale de Nantes pour résoudre les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds pour des écoulements incompressibles et turbulents, sous une forme conservative. Soit un volume V , délimité par une surface ∂V , se déplaçant à une vitesse \mathbf{U}_d et doté d'une normale \mathbf{n} . Les composantes dans les trois dimensions de l'espace de la vitesse de l'écoulement sont notées U_i , et celles des forces volumiques f_i , $i \in [1, 3]$. La pression hydrodynamique est notée p et on utilise la convention d'Einstein pour la sommation des termes correspondant à des indices répétés. Alors, la conservation de la masse d'une part permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_{\partial V} \rho (\mathbf{U} - \mathbf{U}_d) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.6)$$

tandis que la conservation de la quantité de mouvement conduit à

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho U_i dV + \int_{\partial V} \rho U_i (\mathbf{U} - \mathbf{U}_d) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial V} (\tau_{ij} \mathbf{I}_j - p \mathbf{I}_i) \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \rho f_i dV. \quad (2.7)$$

Le vecteur \mathbf{I}_k est un vecteur unitaire de dimension 3, avec pour unique composante non nulle, donc égale à 1, la composante $k \in [1, 3]$. τ_{ij} représente le tenseur des contraintes visqueuses, qui s'exprime, pour un fluide newtonien :

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.8)$$

où μ représente la viscosité dynamique du fluide.

Le cas de l'impact d'un coin, symétrique ou non, est traité par cette méthode. L'intérêt de ce type de méthode réside dans le fait que la déformation de la surface libre peut être captée de manière très fine. En particulier, les jets qui apparaissent au cours de l'impact, sont captés de manière précise. Ce modèle rend également compte du décollement qui intervient dès lors que le coin est complètement immergé et continue à s'enfoncer, comme le montre la figure 2.4.

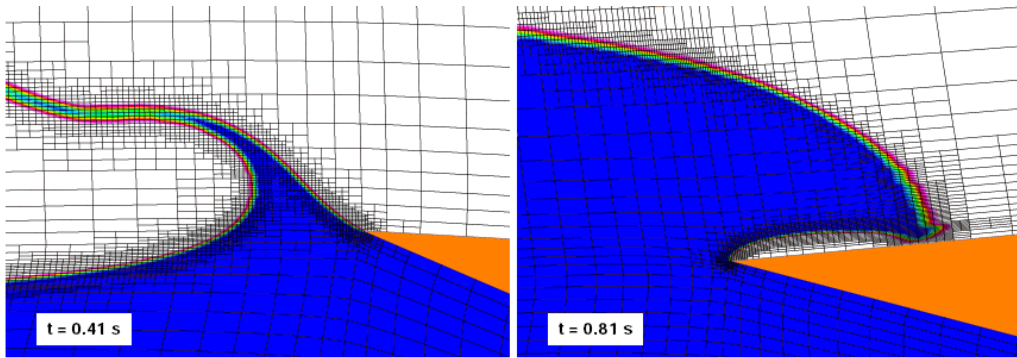


FIG. 2.4 – Détails de la zone qui est le siège du décollement lorsque le coin pénètre au delà de sa ligne de côte maximale, à deux instants différents

- la méthode VOF (acronyme de Volume of Fluid) est une méthode permettant la capture de la position de la surface libre au cours de l'évolution du système. Cette méthode repose sur l'utilisation d'une fonction scalaire ϕ , à valeur dans l'intervalle $[0 : 1]$, qui représente la fraction de fluide dans une cellule donnée (figure 2.5). L'évolution de ϕ est régie par une équation de transport :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (2.9)$$

où u représente la vitesse de l'écoulement au point considéré. Cette méthode permet de simuler des écoulements à surface libre avec des formes arbitraires. Elle a été initialement développée par [Nichols *et al.*, 1980] et [Hirt and Nichols, 1981]. Les équations qui régissent le comportement

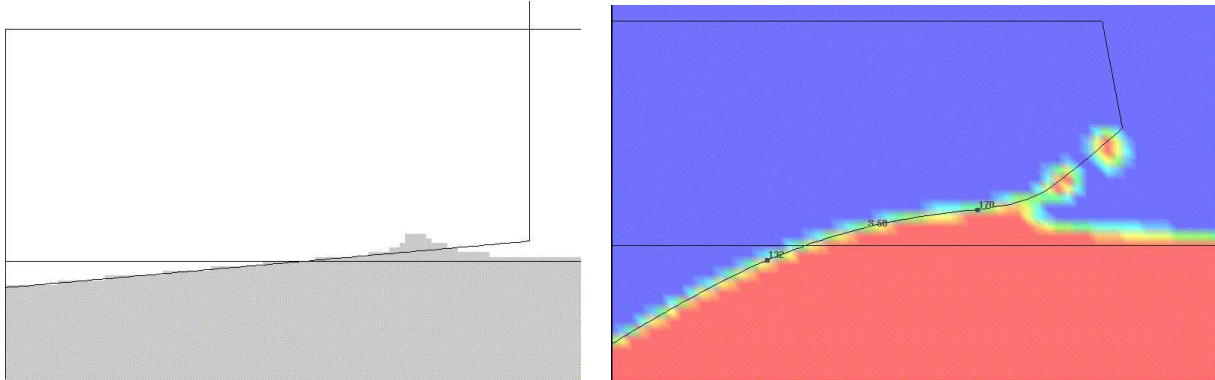


FIG. 2.5 – Simulation de l'impact hydrodynamique d'un coin rigide (gauche) puis déformable (droite) (Aquelet 2004). Illustration de la méthode de capture d'interface VOF.

du fluide peuvent être discrétisées à l'aide d'une méthode volumes finis [Reddy *et al.*, 2003] ou différences finies [Arai *et al.*, 1994], [Arai *et al.*, 1995]. [Xing-Kaeding *et al.*, 2004] ont étudié les déformations de la surface libre générées par la pénétration et la sortie d'un cylindre circulaire. Ils présentent la comparaison de leurs résultats aux photographies des expériences. Comme dans le cas de SPH, cette méthode est généralement couplée avec une formulation éléments finis pour la structure [Aquelet, 2004]. Cette méthode, relativement simple à mettre en oeuvre et peu coûteuse pour une méthode CFD, souffre néanmoins de certaines limitations. Des problèmes de conservation de la masse peuvent être rencontrés. En outre, l'interface n'est pas toujours très régulière (cf fig. 2.5).

- la méthode CIP, acronyme de Constrained Interpolation Profile, a été développée initialement par [Takewaki *et al.*, 1985], [Takewaki and Yabe, 1987] pour simuler les interactions entre un gaz et un fluide ou/et un solide. Son utilisation en hydrodynamique marine est relativement récente. Le problème d'interaction fluide-structure y est vu comme un problème multiphasique (air-liquide-solide). L'écoulement est caractérisé par un système formé des équations de Navier-Stokes et de la loi de conservation de la masse. Ce système est résolu numériquement par différences finies sur une grille recouvrant l'ensemble des domaines considérés. L'identification des frontières des différents domaines requiert l'utilisation de fonctions de densité (une pour chaque domaine), vérifiant une équation de transport. Cette méthode a été utilisée pour traiter de l'impact hydrodynamique d'un cylindre [Zhu *et al.*, 2005], [Zhu, 2006] (cf figure 2.6) ainsi que de l'impact de coins, symétriques ou non [Yang and Qiu, 2007], [Kim *et al.*, 2007].

L'objectif des méthodes présentées dans cette section est d'obtenir un maximum d'informations sur l'écoulement du fluide au cours de l'impact. Elles permettent de prendre en compte assez naturellement des phénomènes compliqués (séparation de l'écoulement, formes complexes). La compressibilité du fluide peut également être facilement prise en compte dans de telles approches, ce qui est important lors de l'impact de sections présentant des angles morts faibles. Toutefois, l'hypothèse d'incompressibilité est souvent utilisée en pratique, pour rendre les calculs plus efficaces.

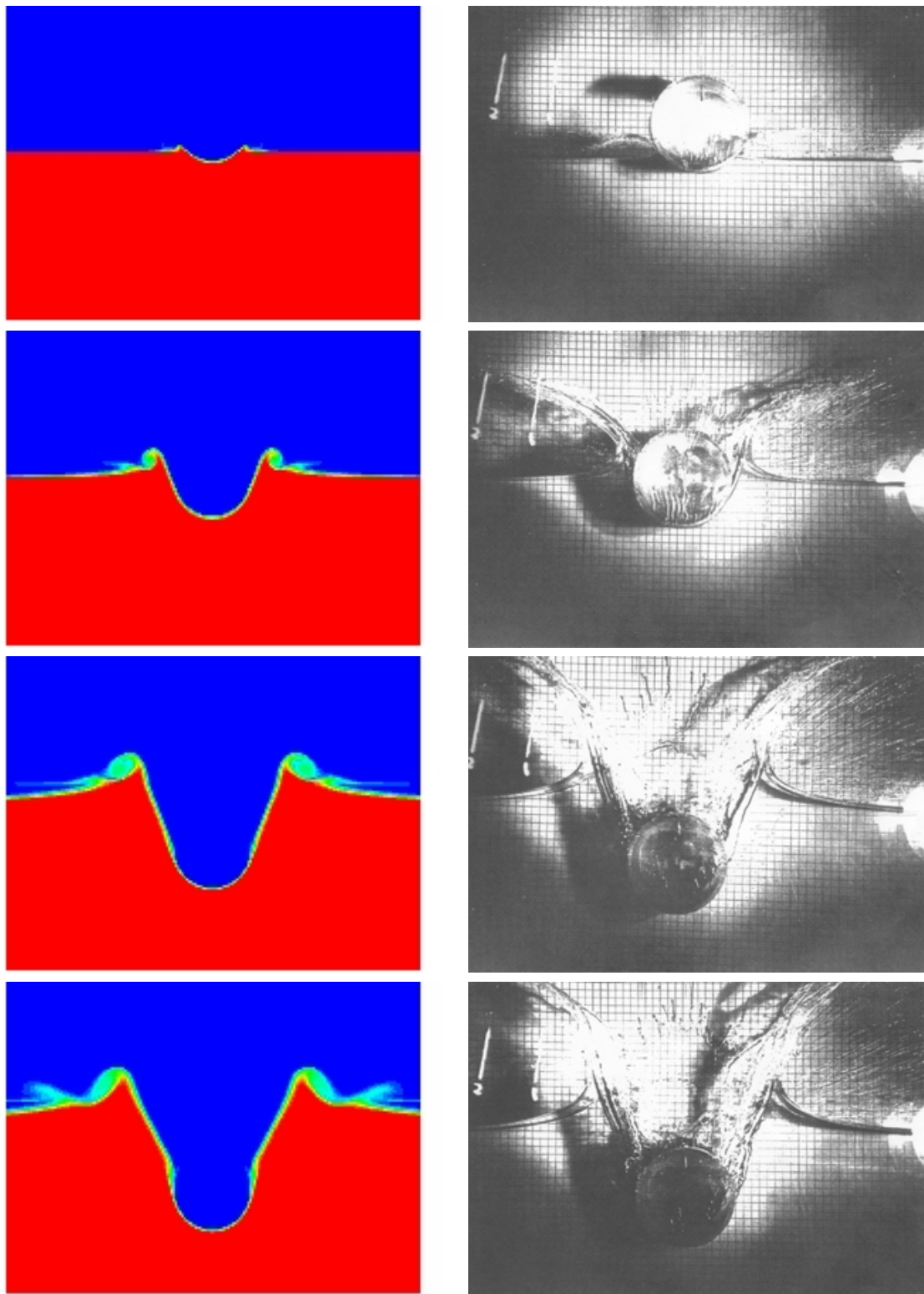


FIG. 2.6 – Illustration de la méthode CIP. Simulation de l'impact hydrodynamique d'un cylindre [Zhu, 2006]. La grandeur représentée est la fonction de densité ϕ_f du fluide. Rouge : $\phi_f = 1$, Bleu : $\phi_f = 0$. Photographies [Greenhow and Lin, 1983]

Des efforts importants ont été consentis ces dix dernières années pour développer plus particulièrement des moyens numériques de simulations de l'impact sur l'eau d'hélicoptère. Cela s'est traduit, par exemple, par les projets européens CAST (Crashworthiness of helicopter on water : design of structure using advanced simulation tools) [CAS, 2003] et CRAHVI (Crashworthiness of aircraft for high velocity impact) [CRA, 2004]. Au sein du projet CAST, les approches de type éléments finis sont favorisées. Un exemple de simulation d'amérissage utilisant le code élément fini commercial RADIOSS est illustré en figure 2.7. Dans le projet CRAHVI, on voit apparaître des simulations faisant intervenir la méthode SPH.

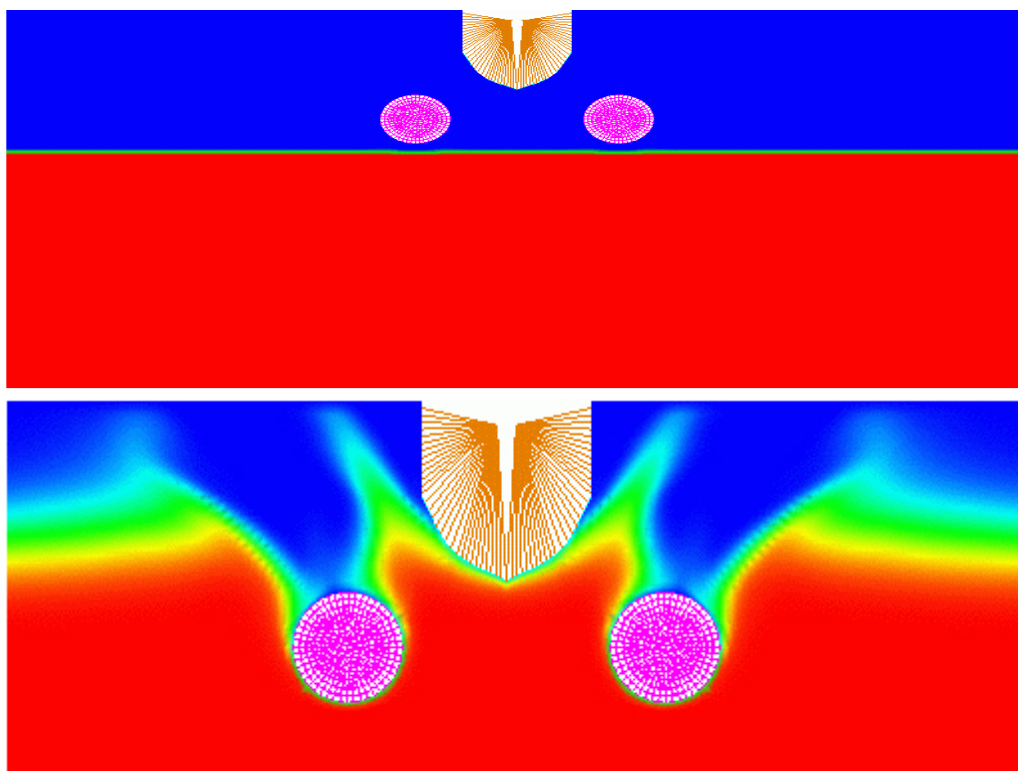


FIG. 2.7 – Simulation de l'impact sur l'eau d'un hélicoptère à l'aide du code RADIOSS (images MECALOG)

Les méthodes de résolution envisagées sont donc purement numériques et les coûts informatiques qu'ils engendrent sont importants comme on le montre plus loin. Par ailleurs, le problème de l'impact tel qu'on se le pose est centré sur les contraintes auxquelles va être soumise la structure et non sur l'écoulement qui l'entoure. Dans une approche de type CFD, l'utilisation d'une discrétisation spatiale rend le calcul des chargements hydrodynamiques délicat. En particulier, le calcul des chargement locaux, c'est à dire de la pression est problématique. En effet, au cours du phénomène d'impact, celle-ci présente des variations à la fois spatiales et temporelles très rapides. Or, un maillage est difficilement adaptable à des variations aussi brutales. En pratique, et afin de pouvoir réaliser un grand nombre de calcul en un temps restreint, les constructeurs d'hélicoptères utilisent des modèles plus simples, permettant un recours aux ressources numériques plus parcimonieux. Ces modèles requièrent néanmoins l'utilisation d'hypothèses supplémentaires, comme on va le voir par la suite.

2.2 Modèles en théorie potentielle

En remarquant que, lors des premiers instants de l'impact d'un corps solide sur une surface libre initialement au repos :

- l'accélération de la pesanteur est négligeable devant la décélération du corps impactant. L'influence de la gravité est donc négligée ;
- la pression acoustique $p_{ac} = \rho c v$ est beaucoup plus importante que les pressions hydrodynamiques mises en jeu. Le fluide peut donc être considéré comme incompressible.
- les temps considérés étant courts, la couche limite, dont l'épaisseur est $e = \sqrt{\nu t}$, n'a pas le temps de se développer (ν représente la viscosité cinématique). Le fluide peut être considéré comme un fluide parfait.
- l'écoulement est irrotationnel aux premiers instants du contact et il le reste par la suite.

Alors, le problème peut être formulé en théorie potentielle. Différentes approches peuvent alors être choisies. On peut en effet choisir de formuler le problème en terme de potentiel des déplacements, en terme de potentiel des vitesses, ou en terme de potentiel des accélérations. La vitesse de l'écoulement dérive alors d'un potentiel des vitesses φ qui vérifie un problème aux limites. Celui-ci est formé de l'équation de Laplace dans le domaine fluide ainsi que des conditions cinématique et dynamique à la surface libre (CCSL et CDSL) ainsi qu'à la surface mouillée du corps impactant (CCSM).

La condition cinématique de surface libre s'obtient en considérant le fait que les particules se situant sur la surface libre à l'instant de contact initial y restent par la suite. Cela se traduit par le fait que :

$$\frac{D}{Dt}(y - \eta(t)) = 0,$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}$ représente la dérivée particulaire.

La condition dynamique de surface libre est fournie par l'équation de Bernoulli :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0,$$

où p est égale à la pression atmosphérique dès lors que l'on se place à la surface libre. Celle-ci est supposée égale à zéro

Enfin, la condition cinématique prescrite sur la surface mouillée traduit l'imperméabilité de cette dernière et donc que le flux au travers de celle ci est nul. Elle peut s'écrire

$$\frac{D}{Dt}(y - f(x) - H(t)) = 0.$$

Il en résulte le problème aux limites complet :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & y < 0 \\ \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 & y(t) = \eta(x, t), \quad CCSL \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 \right] = 0 & y(t) = \eta(x, t), \quad CDSL \\ \frac{df}{dx} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = V & y(t) = f(x) - H(t), \quad CCSM \\ \eta(x, t) \rightarrow 0 & |x| \rightarrow \pm\infty \\ \varphi(x, y, 0) = 0 \quad \eta(x, 0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où $\eta(x, t)$ représente l'élévation de la surface libre en un point d'abscisse x , $H(t)$ l'enfoncement du corps à un temps t et f la fonction qui définit la forme du corps impactant (cf. fig. 2.8).

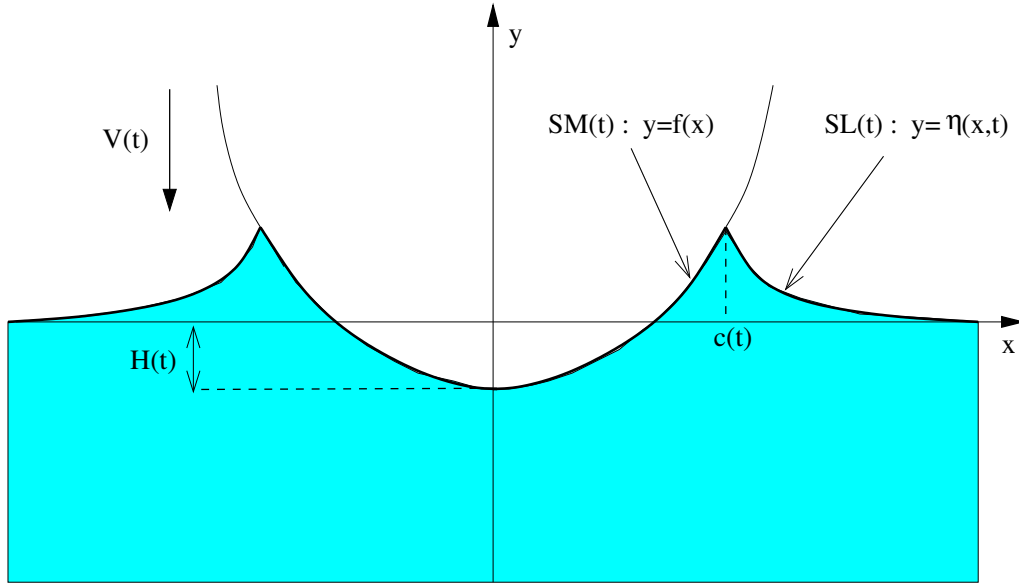


FIG. 2.8 – Définition des grandeurs géométriques du problème

Le jet qui apparaît lors de l'impact d'un corps sur l'eau est ici négligé. Cette hypothèse est admissible dans le sens où la contribution du jet aux efforts qui s'exercent sur le corps impactant est négligeable. Par ailleurs, très peu de fluide est éjecté dans le jet. En revanche, cette éjection se fait à une vitesse très importante, ce qui signifie que d'un point de vue énergétique, la prise en compte du jet est importante. La difficulté du problème ainsi formulé réside dans le fait que les frontières du domaine fluide (surface mouillée $SM(t)$ et surface libre $SL(t)$) sont des inconnues à part entière et des fonctions du temps. Différentes stratégies pouvant être adoptées pour simplifier le problème vont maintenant être détaillées. Dans la suite, on appelle angle mort l'angle au point de contact entre la surface du corps et l'horizontale. Selon

la valeur de cet angle, la surface mouillée peut être linéarisée, ou non. Cela signifie qu'elle est remplacée par une plaque plane, en expansion dans le fluide. C'est une hypothèse forte, qui ne peut être faite que si l'angle mort est suffisamment faible (inférieur à 20°). Dans ce cas, des simplifications supplémentaires peuvent être obtenues en linéarisant les conditions aux limites (Karmann, Wagner, MLM...). Le problème peut également être résolu tel quel, sans linéarisation des conditions aux limites (Vorus).

Si la linéarisation de la surface mouillée est impossible, on doit considérer la forme exacte du corps impactant et une alternative s'offre alors. On peut effectivement procéder à la linéarisation de la surface libre et des conditions aux limites (modèle de Wagner généralisé), ou résoudre le problème complet sans aucune linéarisation pour des cas simples (Dobrovols'kaya) ou plus complexes (BEM).

Dans ce qui suit, les modèles correspondant à ces différents degrés de linéarisation sont brièvement présentés dans cet ordre, donc par ordre croissant de complexité.

2.2.1 Les modèles linéarisés

Modèle de type Karman

On considère les travaux de [von Karman, 1929] comme les premiers ayant trait à l'impact hydrodynamique. Ces travaux étaient motivés par l'étude de l'amerrissage des hydravions. Dans ce modèle, les effets de la gravité, ainsi que l'élévation de la surface libre sont négligés (cf. figure 2.9). Cette dernière hypothèse, très forte, implique que le point d'intersection entre la surface libre et la surface mouillée (noté c_K) correspond au point d'intersection entre la surface du corps et la surface libre du fluide au repos. Cette hypothèse entraîne une importante sous-estimation des efforts d'impact. Dans cette approche, tout le problème est projeté sur l'axe correspondant à la surface libre au repos (cf fig. 2.9).

Modèle de Wagner Original (OWM)

La méthode de Wagner linéarisée [Wagner, 1932] est basée sur une approximation de type plaque plane de la surface mouillée du corps impactant qui est donc remplacée par un disque plat (cf. fig. 2.9). La forme de ce disque est inconnue par avance et doit être considérée comme une inconnue du problème. En effet, la position du point de contact entre la surface mouillée et la surface libre dépend de l'élévation de la surface libre en ce point. Les conditions aux limites sont linéarisées et imposées sur la surface libre non-perturbée. L'élévation de la surface libre sera calculée *a posteriori*. On forme le petit paramètre $\epsilon = H(t)/L(t)$, où $H(t)$ est la profondeur de pénétration et L est la demie longueur mouillée. Le potentiel des vitesses φ et l'élévation de surface libre η sont cherchés sous la forme de séries de puissance de ϵ . Au premier ordre, le problème se résout analytiquement. On obtient alors :

$$\varphi_0(x, y, t) = -V \left(y - \sqrt{c_W^2(t) - x^2} \right), \quad (2.11)$$

où $c_W(t)$ est l'abscisse du point de contact entre la surface libre $SL(t)$ et la surface mouillée $SM(t)$. La pression sur la surface mouillée, i.e en $x < c_W(t)$ et $y = 0$, est donnée par l'équation de Bernoulli :

$$p_0(x, t) = -\rho \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \rho \frac{V c_W(t)}{\sqrt{c_W(t)^2 - x^2}} \frac{dc_W(t)}{dt}. \quad (2.12)$$

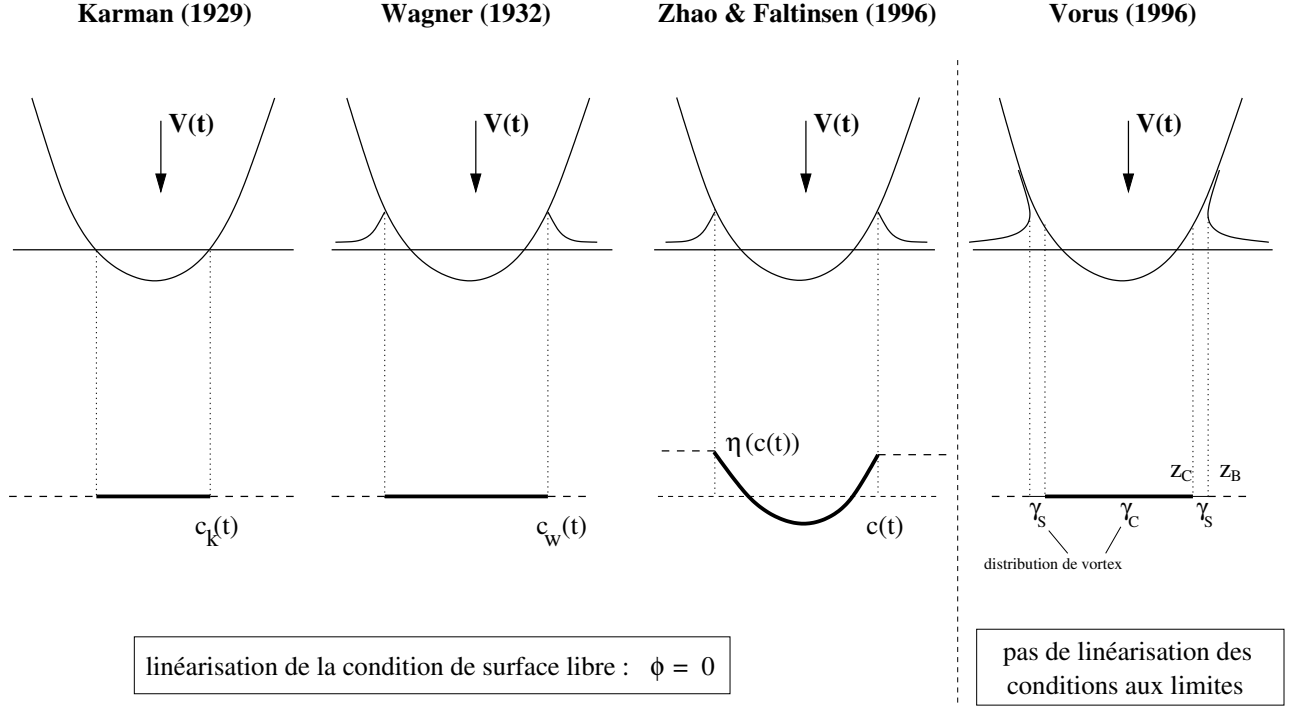


FIG. 2.9 – Représentation synthétique des différentes linéarisations du problème pouvant être adoptées.

La solution au premier ordre n'est pas toujours satisfaisante en terme de calcul des efforts. Pour palier à ce problème, il faut s'intéresser à la solution au second ordre. Cette solution a été envisagée par [Armand and Cointe, 1986] puis [Fontaine and Cointe, 1992] mais le problème au second ordre n'est réellement résolu que par [Korobkin, 2005] pour le problème de l'impact d'une parabolé fluide sur une plaque plane rigide. [Oliver, 2007] résout à son tour ce problème dans le cadre de l'impact hydrodynamique, à proprement parler, d'une section d'un corps solide sur une surface fluide. Le recours à la solution au second ordre permet effectivement d'améliorer le calcul des efforts, comme le montre par exemple [Korobkin and Malenica, 2005].

L'approche de Wagner linéarisée peut être utilisée pour des corps présentant un angle mort faible et au cours des premiers instants de l'impact. La substitution d'un disque plat à la surface mouillée doit en effet garder un sens.

La forme du disque (dont la connaissance se résume en 2D et en axisymétrique à celle du point de contact $c(t)$ entre la surface libre et la surface mouillée, ou à celle d'une ligne en 3D quelconque) est déterminée à l'aide de la condition dite de Wagner, qui traduit la continuité de la surface fluide le long de la ligne de contact entre la surface mouillée et la surface libre :

$$\eta(x, y, t) = f(x, y) - H(t), \quad \text{sur } SM(t) \cap SL(t), \quad (2.13)$$

L'un des intérêt du modèle de Wagner linéarisé réside dans le fait que le temps est un paramètre. On peut donc lui substituer $c(t)$ et calculer les chargements à n'importe quel instant, sans avoir recours à toute l'histoire du système antérieure à t . Dans les cas bidimensionnels et axisymétriques, la condition de Wagner se réduit à une simple équation pour l'inconnue $c(t)$, ce qui simplifie l'analyse du problème. Il est cependant possible de prendre en compte des corps asymétriques (voir [Toyama, 1993], [Scolan *et al.*, 1999], [Howison *et al.*, 2004]). Un certain nombre de solutions exactes ont également été dérivées ([Scolan and Korobkin, 2001] et [Korobkin and Scolan, 2006]) pour des problèmes tridimensionnels.

La théorie de Wagner est d'un intérêt certain car elle a été la première à tenir compte de l'effet de correction mouillée qui intervient du fait de l'élévation de la surface libre lors de l'entrée du corps impactant (cf. figure 2.9). Toutefois, ce modèle, sous sa forme originale, prédit à la fois une pression et une vitesse de l'écoulement infinie au voisinage du point de contact. Cette singularité est liée au changement de type de condition aux limites au point de contact.

Raccordements asymptotiques

Une manière d'éliminer la singularité consiste à raccorder asymptotiquement la solution dans la zone où $x < c(t)$ à une solution décrivant le jet dans un voisinage du point de contact. [Wagner, 1932] a été le premier à proposer une décomposition du problème en deux zones. C'est cependant [Wanatabe, 1986] qui le premier élimine la singularité par cette technique. Toutefois, la solution interne au jet choisie n'étant pas satisfaisante, [Armand and Cointe, 1986] ont ensuite proposé une solution plus adaptée. [Cointe, 1991] et [Howison *et al.*, 1991] ont

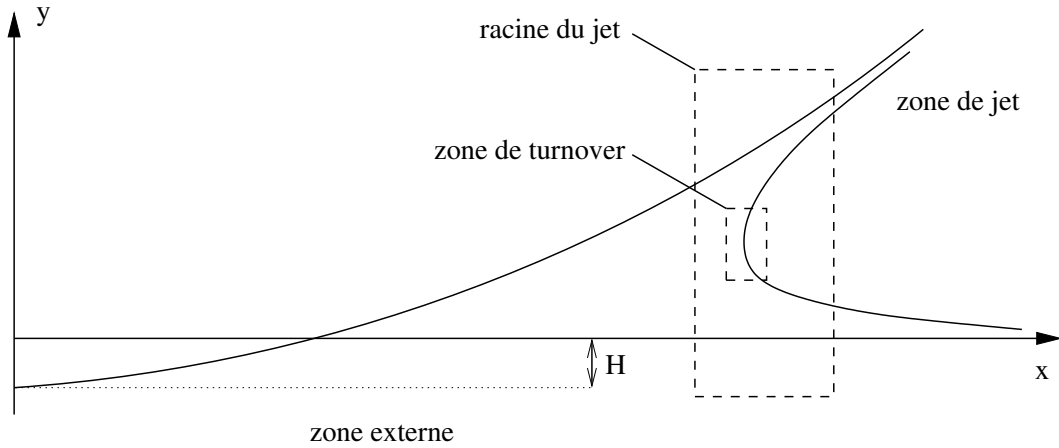


FIG. 2.10 – Décomposition du problème d'impact en trois problèmes distincts selon que l'on considère la zone externe au jet, la racine du jet ou le jet lui même

montré de manière similaire mais indépendamment l'un de l'autre que pour une meilleure précision, trois régions doivent en fait être considérées (voir figure 2.10) : la zone "externe", ($x < c(t)$) dans laquelle l'écoulement est connu par la théorie des ailes portantes [Gakhov, 1966], [Newman, 1977] ; la zone "interne" (racine du jet), au voisinage de $x = c(t)$ dans laquelle le jet se forme ; la zone du jet à proprement parler. Si on ne considère que la force hydrodynamique qui s'exerce sur le corps au cours de l'impact, le jet peut être négligé du fait de sa contribution quasi nulle. D'un point de vue énergétique, il en va tout autrement. De manière générale, il est prouvé (voir [Scolan and Korobkin, 2003a]) que dans un cas rigide, la quantité d'énergie E_j qui part dans le jet est égale à

$$E_j = \frac{1}{2} M_a V^2(t) \quad (2.14)$$

où $M_a(t)$ est la masse ajoutée à l'instant t . Comme le soulignent [Cointe *et al.*, 2004], cela implique que dans le cas d'une vitesse V constante, la moitié de l'énergie transmise au fluide se retrouve sous forme d'énergie cinétique dans le jet. L'influence de l'élasticité sur la distribution de l'énergie a également été analysée par [Scolan and Korobkin, 2003b] dans le cas d'un cône axisymétrique déformable.

La solution dans le jet est détaillée dans [Wilson, 1989]. A la racine du jet, la solution adoptée

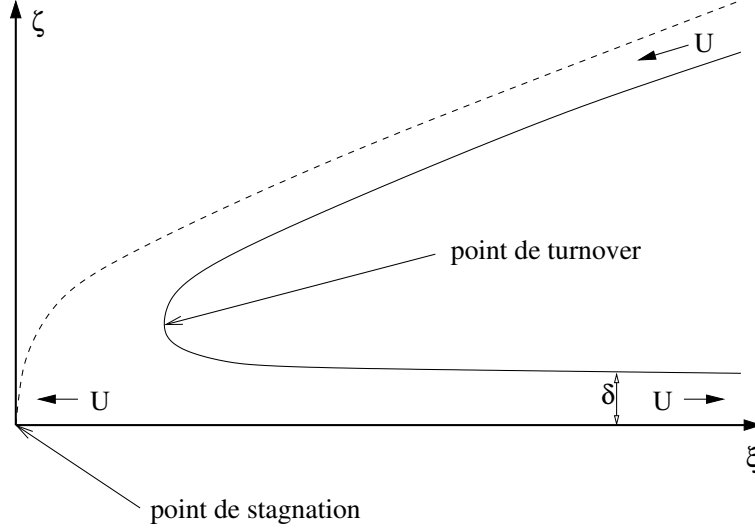


FIG. 2.11 – Représentation du problème à la racine du jet.

peut être représentée telle qu'en figure 2.11. Dans ce cas, le problème est vu comme un écoulement le long d'une plaque plane [Wagner, 1932]. L'axe ξ du repère représenté en figure 2.11 est confondu avec cette plaque tandis que l'axe ζ lui est orthogonal. La surface libre est représentée en trait plein. La ligne en traits pointillés représente la ligne de courant aboutissant au point de stagnation. Le jet a pour épaisseur δ et le fluide en son sein, une vitesse U . La solution est obtenue en transformant le domaine fluide, de telle sorte que celui-ci corresponde au demi plan supérieur (voir [Wilson, 1989] par exemple). Dans cette zone, on obtient l'expression suivante pour la pression :

$$p_i(x, y, t) = \rho \frac{\dot{c}(t)}{2} \left(1 - \left(\frac{1 - \tau}{1 + \tau} \right)^2 \right), \quad (2.15)$$

où

$$\begin{aligned} x - c(t) &= \frac{\delta}{\pi} \left(2 \log \tau - \frac{4}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} + 5 \right), \quad \text{si } x < c(t) \\ x - c(t) &= \frac{\delta}{\pi} \left(-2 \log \tau - 4\tau - \tau^2 + 5 \right), \quad \text{si } x > c(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Au voisinage du point de stagnation, donc de la zone externe le potentiel des vitesses à la racine du jet a pour expression

$$\phi_i(x, y, t) \sim -\frac{4U\delta}{\pi} |\tau|^{-1} \quad (2.17)$$

et la pression

$$p_i(x, y, t) \sim 2\rho\dot{c}^2\tau \quad \text{et} \quad x - c(t) \sim -\frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\tau^2} \quad (2.18)$$

Le raccordement de cette solution dans la zone interne à la solution dans la zone externe en terme de potentiel (2.11) et de pression (2.12), permet de calculer la vitesse du fluide dans le jet ainsi que son épaisseur. On obtient ainsi :

$$U(t) = \dot{c}(t) \quad \delta(t) = \frac{\pi V^2}{8} \frac{c(t)}{\dot{c}(t)^2} \quad (2.19)$$

Dès lors qu'une décomposition du domaine fluide est définie et qu'une solution est calculée pour chacune des zones, une solution composite, dénuée de singularité peut être formée. Par

exemple, les contributions respectives de la solution externe et celle de la racine du jet peuvent être additionnées. On obtient ensuite une distribution composite valide en soustrayant la partie commune à ces deux contributions ([Zhao and Faltinsen, 1992]). Cette solution n’est donc pas unique : [Oliver, 2002] propose même de prendre en compte une quatrième zone qu’il appelle zone de “turnover”. Cette zone permet de se focaliser sur un très proche voisinage du point où la surface libre se “retourne” pour former le jet.

Méthodes dites de “Logvinovich”

Une autre méthode pour rendre la vitesse de l’écoulement finie dans la zone de contact consiste à modifier localement le potentiel des vitesses en lui ajoutant des termes. Ces termes additionnels sont évalués de telle sorte que la vitesse de l’écoulement au point de pression nulle soit double par rapport à la vitesse au point de contact. Pour cela, le développement de Taylor suivant est utilisé

$$\phi(x, t) = \varphi(x, 0, t) - \frac{\partial H(t)}{\partial t} (f(x) - H(t)), \quad (2.20)$$

où $\varphi(x, 0, t)$ est la solution du problème de Wagner linéarisé classique. Le calcul du point de contact s’effectue de la même manière que pour la méthode de Wagner originale. Ce genre de modèle est classiquement appelé modèle de Logvinovich, qui a été le premier à l’introduire [Logvinovich, 1969]. Les résultats obtenus par un modèle de Logvinovich sont généralement très satisfaisants en terme d’efforts (cf. figure 2.13). Néanmoins, ce modèle ne repose sur aucune justification mathématique. En outre, et sous sa forme originale (OLM), le modèle de Logvinovich [Logvinovich, 1969], n’est applicable qu’à des corps symétriques et rigides présentant un angle mort faible. Ce modèle a été généralisé par [Korobkin, 2004] en utilisant des développements asymptotiques. On fait alors référence au Modèle de Logvinovich Modifié (MLM). Ce modèle permet en particulier de prendre en compte des corps asymétriques [Korobkin and Malenica, 2005].

La pression s’obtient en substituant (2.20) dans l’équation de Bernoulli. On obtient alors :

$$p(x, t) = \rho V \left\{ \frac{c(t) c'(t)}{\sqrt{c(t)^2 - x^2}} - \frac{V}{2} \frac{c(t)}{c(t)^2 - x^2} \frac{1}{1 + f_{,x}^2} - \frac{V}{2} \frac{f_{,x}^2}{1 + f_{,x}^2} \right\} \quad (2.21)$$

$f_{,x}$ est la dérivée par rapport à x de la fonction de forme. La pression s’annule en un point situé en amont du point de contact. L’expression de la pression dans l’approche originale de Logvinovich peut être obtenue en négligeant les termes du second ordre pour l’angle mort. Encore une fois, l’utilisation de MLM est préférable à celle de OLM car elle permet de minimiser la distance entre $a(t)$ (défini par $p(a(t), t) = 0$) et $c(t)$. MLM permet ainsi d’obtenir de meilleurs résultats que OLM lorsque l’angle mort n’est pas très petit. L’intérêt pratique de la méthode MLM réside en particulier dans la bonne prédiction (cf. fig. 2.13) qu’il permet d’obtenir en terme de force (obtenue par intégration de la pression sur $[-a(t), a(t)]$) pour un coût numérique très faible. En revanche, cette méthode souffre d’un manque de fiabilité quant au calcul de la distribution de pression. Il s’agit d’un défaut que lui reconnaisse ses créateurs eux-même. Il est illustré en figure 2.12, où la distribution sur les deux faces d’un coin asymétrique est calculé par la méthode MLM et la méthode de Wagner généralisé [Malleron and Scolan, 2007]. La solution auto semblable de [Semenov and Iafrati, 2006] est prise comme solution de référence dans ce cas.

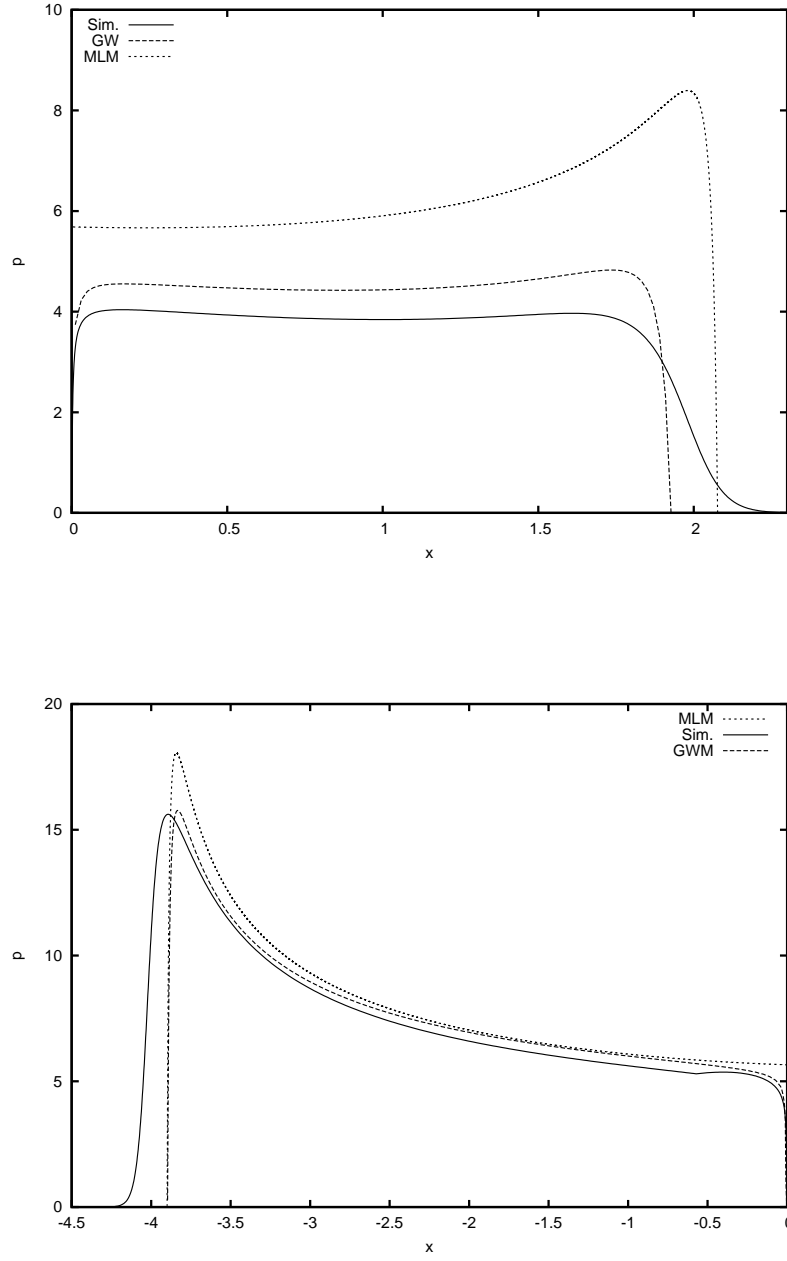


FIG. 2.12 – Distribution de pression sur un coin asymétrique. A droite (haut), l'angle mort est égal à 20° , à gauche (bas), l'angle mort vaut 40° . La solution auto-semblable de [Semenov and Iafrati, 2006] (trait plein) est considérée comme une référence. La solution obtenue par MLM (pointillés épais), ainsi que celle obtenue à l'aide d'un modèle de Wagner généralisé (pointillés fins) [Malleron and Scolan, 2007] sont tracées

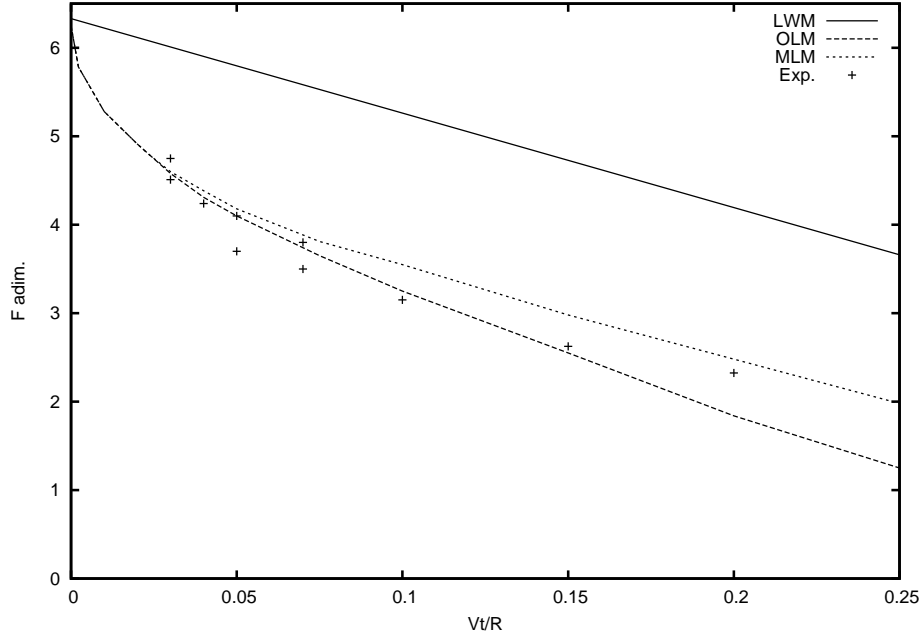


FIG. 2.13 – Histoire de la force hydrodynamique s’appliquant sur un cylindre circulaire de rayon R (d’après [Korobkin, 2004]). Les données expérimentales sont issues des expériences de [Armand and Cointe, 1986]

Inégalités variationnelles

[Gazzola *et al.*, 2005], [Gazzola *et al.*, 2007], [Gazzola, 2007] présentent une méthode de résolution du problème de Wagner linéarisé 3D à l’aide d’une méthode classique d’inégalités variationnelles. Dans cette approche, la solution du problème est cherchée en terme de potentiel des déplacements $\phi^D(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \phi(\mathbf{x}, \tau) d\tau$ et le problème s’écrit sous forme d’une inégalité variationnelle :

$$a(\phi^D, v - \phi^D) \geq l(v - \phi^D), \quad \forall v \in K, \quad (2.22)$$

où K est un sous espace de fonctions de carré sommable, choisi de manière appropriée. a et l sont des formes respectivement bilinéaire et linéaire, dotées des propriétés mathématiques permettant de considérer le problème comme un problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v). \quad (2.23)$$

Les figures 2.14 et 2.15 donnent un exemple d’application de cette méthode. L’impact d’une pyramide à base carrée (retournée), dont la forme est définie dans un repère cartésien par $z = 2(|x| + |y|)$, est considéré. En figure 2.14, une carte représente le potentiel des déplacements calculé à une profondeur donnée. La figure 2.15 donne accès à une comparaison avec la solution de référence de [Korobkin and Scolan, 2006].

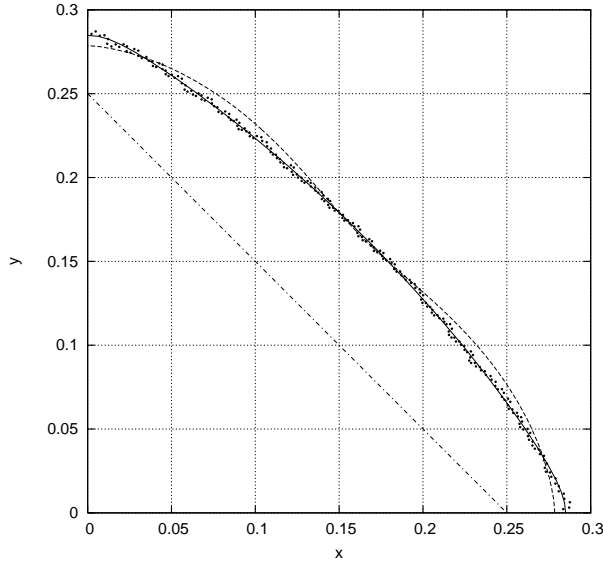


FIG. 2.14 – Ligne de contact entre la surface de la pyramide et la surface libre (d’après [Gazzola, 2007]). La pénétration vaut $H = 0.5$. La courbe pointillée est issue du modèle de Wagner linéarisé de [Korobkin and Scolan, 2006]. Les points et la ligne pleine représentent la solution de [Gazzola, 2007]. La courbe en pointillés et traits alternés représente l’intersection entre la pyramide et la surface libre initiale.

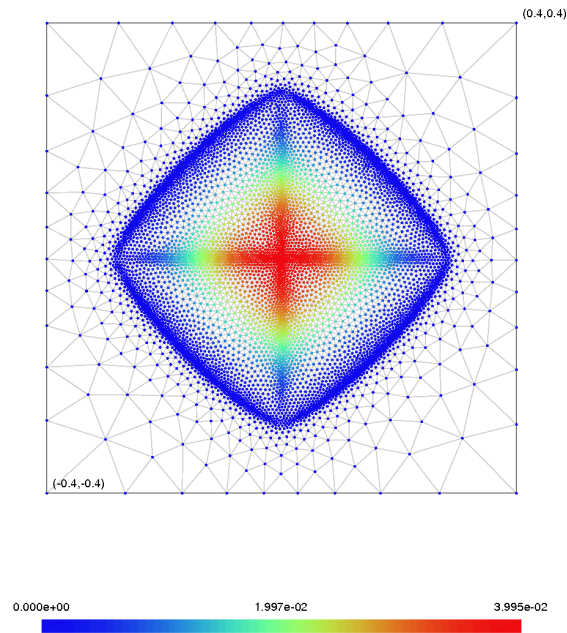


FIG. 2.15 – Potentiel des déplacements lors de l’impact sur l’eau d’une pyramide dans le plan de la surface libre initiale pour une valeur de la pénétration $H = 0.5$ (d’après [Gazzola, 2007])

Cette méthode donne accès à des résultats remarquables mais souffre encore d'un coût CPU important.

2.2.2 Modèle de Vorus

[Vorus, 1996] propose un modèle s'affranchissant de la linéarisation des conditions aux limites (notamment sur la surface libre), en s'inspirant des travaux de [Tulin, 1957]. Ce modèle se veut un modèle intermédiaire entre les modèles qui résolvent le problème complet dans le domaine temporel (type BEM) et les modèles asymptotiques de type Wagner. Tout le problème est néanmoins projeté sur l'axe horizontal (voir fig. 2.9). Il s'agit donc d'un modèle linéaire d'un point de vue géométrique. D'un point de vue hydrodynamique, il est non linéaire et prend en compte les grandes perturbations de l'écoulement produites par le corps impactant. En effet, il est basé sur l'observation qu'il existe une zone, lors de la pénétration, dans laquelle la vitesse tangentielle de l'écoulement est très importante (et rend négligeable la vitesse normale de l'écoulement). Cette zone est bornée par le point z_C où la distribution de pression s'annule, et le point z_B qui correspond au point de "turnover" de la surface libre (voir figure 2.9). Vorus utilise ensuite une distribution de vortex, dont l'intensité devient l'inconnue principale du problème. Bien que cette théorie ait été développée comme une solution asymptotique valide pour les faibles angles morts, elle a été appliquée pour des angles morts relativement importants. Pour une vitesse constante lors de l'impact, la solution fournie est de bonne qualité et peut être comparée à celle de modèles plus classiques. Dans le cas d'une chute libre, et pour un coin de 20° , l'erreur commise sur l'accélération est inférieure à 5%.

La théorie de Vorus, valable pour des formes symétriques quelconques a ensuite été complétée par [Xu *et al.*, 1998a]. Dans cette étude, la théorie de Vorus est utilisée pour traiter de l'impact de coins asymétriques. [Savander *et al.*, 2002] ont encore étendu par la suite le domaine d'application de cette théorie en l'incorporant dans une théorie des corps élancés capable de modéliser des variations longitudinales importantes de géométrie de coques planantes. Le modèle de [Xu *et al.*, 1998b], comme le modèle de Vorus, ne prend en compte que des impacts verticaux. [Judge *et al.*, 2004] ont développé un modèle basé sur la théorie de Vorus, autorisant les mouvements horizontaux avant et pendant l'impact. Un certain nombre de résultats expérimentaux ont en outre été présentés pour l'impact d'un coin avec une vitesse horizontale.

2.2.3 Modèle de Wagner généralisé

Dans [Zhao *et al.*, 1996], un modèle que l'on désignera par la suite comme "modèle de Wagner généralisé" est proposé. C'est cette approche qui va être utilisée dans cette thèse. Dans ce modèle, la condition d'imperméabilité est imposée sur la surface mouillée exacte, qui n'est donc pas linéarisée. L'originalité de ce modèle provient du fait que la condition dynamique de surface libre, réduite à une condition de Dirichlet homogène pour le potentiel des vitesses, est imposée sur une ligne horizontale, émanant du point de contact (cf. figure 2.9). La résolution est alors basée sur l'intégration en temps de la condition cinématique de surface libre écrite aux points de contact. Le jet qui se développe lors de l'impact n'est pas pris en compte dans ce modèle. [Zhao *et al.*, 1996] résolvent le problème ainsi formulé de manière numérique. Dans [Mei *et al.*, 1999], une méthode de résolution élégante de ce problème de Wagner généralisé, basée sur les transformations conformes, est proposée. Cette manière de procéder a été reprise par [Yettou *et al.*, 2007], en tenant compte d'une vitesse de pénétration variable. L'extension au cas asymétrique a également été réalisée [Malleron and Scolan, 2007]. Une extension au cas tridimensionnel a été proposée dans [Faltinsen and Chezhian, 2005]. Une telle généralisation suscite toutefois des interrogations du fait de la linéarisation de la surface libre employée. En

effet, celle ci ne permet pas la définition de la surface libre sous la forme d'une surface régulière mais seulement comme un ensemble de lignes horizontales, émanant de la ligne de contact, ce qui est tout à fait artificiel. Le modèle de Wagner généralisé ne conserve pas la bonne propriété du modèle linéarisé dans lequel le temps est un paramètre. Toute l'histoire du système doit dès lors être calculée systématiquement.

2.2.4 Résolution du problème complètement non linéaire

Cas particulier-solution exacte

Dans le cas particulier de l'impact d'un coin à vitesse de pénétration constante, il est possible d'obtenir une solution quasi-analytique du problème complet. [Wagner, 1932] a été le premier à montrer que l'écoulement autour d'un coin lors d'un impact à vitesse constante est auto-semblable. Dès lors, cet écoulement peut être représenté par les deux variables : $\xi = x/Ut$ et $\eta = y/Ut$. De nombreux travaux en découlent, comme ceux de [Pierson, 1950] ou [Mackie, 1962]. La preuve de l'existence et de l'unicité d'une telle solution quel que soit l'angle mort a été fournie par [Fraenkel and Keady, 2004]. Le problème de l'impact d'un coin fluide sur une surface plane rigide a été résolu en premier [Cumberbatch, 1960]. Dans le cas du problème qui nous intéresse, l'étude de [Dobrovol'skaya, 1969] s'avère particulièrement importante. Une solution numérique du problème complètement non-linéaire est proposée. Pour ce faire, un potentiel des vitesses adimensionalisé ϕ tel que :

$$\varphi(x, y, t) = Vt\phi(\xi, \eta) \quad (2.24)$$

est construit. Celui-ci doit vérifier la condition de surface libre, définie par $\eta = \eta(\xi)$. L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\phi(\xi, \eta) - \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \eta(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} = 0, \quad (2.25)$$

et la condition cinématique de surface libre devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} - \eta'(\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + \xi \eta(\xi) - \eta(\xi) = 0. \quad (2.26)$$

Dobrovol'skaya montre que la vitesse de l'écoulement peut s'écrire comme :

$$\mathbf{grad} \phi = V \mathbf{F}(w(\xi, \eta)), \quad (2.27)$$

où w est relié à ξ et η par une transformation conforme. \mathbf{F} se déduit de la fonction f (voir [Dobrovol'skaya, 1969]), qui vérifie :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{c_0}{c} \int_0^t \left(\frac{(1-t)^{-1-\gamma} \exp \left\{ t \int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau(\tau-1)} \right\}}{\int_t^1 \ell^{-\frac{3}{2}} (1-\ell)^{-\frac{1}{2}+\gamma} \exp \left\{ -\ell \int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau(\tau-1)} \right\} d\ell} \right) dt \quad (2.28)$$

avec :

$$\frac{c_0}{c} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 r^{-\frac{3}{2}} (1-r)^{-\frac{1}{2}+\gamma} (2r-1)^{-\gamma} \exp \left\{ -\int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau(\tau(2-\frac{1}{r})-1)} \right\} dr}{\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-r)^{-1-\gamma} (2r-1)^{-1-\gamma} \exp \left\{ \int_0^1 \frac{f(\tau) d\tau}{\tau(\tau(2-\frac{1}{r})-1)} \right\} dr}, \quad (2.29)$$

et :

$$\gamma = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\pi}. \quad (2.30)$$

L'équation intégrale (2.28) doit être résolue numériquement. Cette solution n'est cependant valable que pour un angle mort supérieur à 30° . [Zhao and Faltinsen, 1992] généralisent cette solution et obtiennent des résultats pour des valeurs de l'angle mort allant de 4 à 81° . Cette résolution représente un certain coût numérique et est restreinte au cas d'un coin à vitesse de pénétration constante. Toutefois, il s'agit d'une solution de référence.

[Garabedian, 1953] et [Borg, 1957] ont été les premiers à s'intéresser au cas de l'impact d'un coin asymétrique. [Chekin, 2004] généralise les travaux de Dobrovol'skaya dans ce cas. La solution complète de ce problème a été développée récemment par [Semenov and Iafrati, 2006]. Dans le cas d'un impact asymétrique, l'écoulement au voisinage de l'apex ne peut plus être décrit par la théorie potentielle. L'écoulement doit donc être décrit localement par une solution tenant compte de la vorticité [Riccardi and Iafrati, 2004].

Méthode BEM

La méthode des éléments de frontière a fait l'objet d'un grand nombre d'étude et d'application au cas de l'impact hydrodynamique. Les premiers travaux sur ce sujet sont ceux de [Greenhow, 1987],[Greenhow, 1988]. Un domaine fluide instantané Ω , ne contenant pas l'intégralité du jet (voir fig. 2.16) est défini. Le potentiel des vitesses φ en un point P , situé à

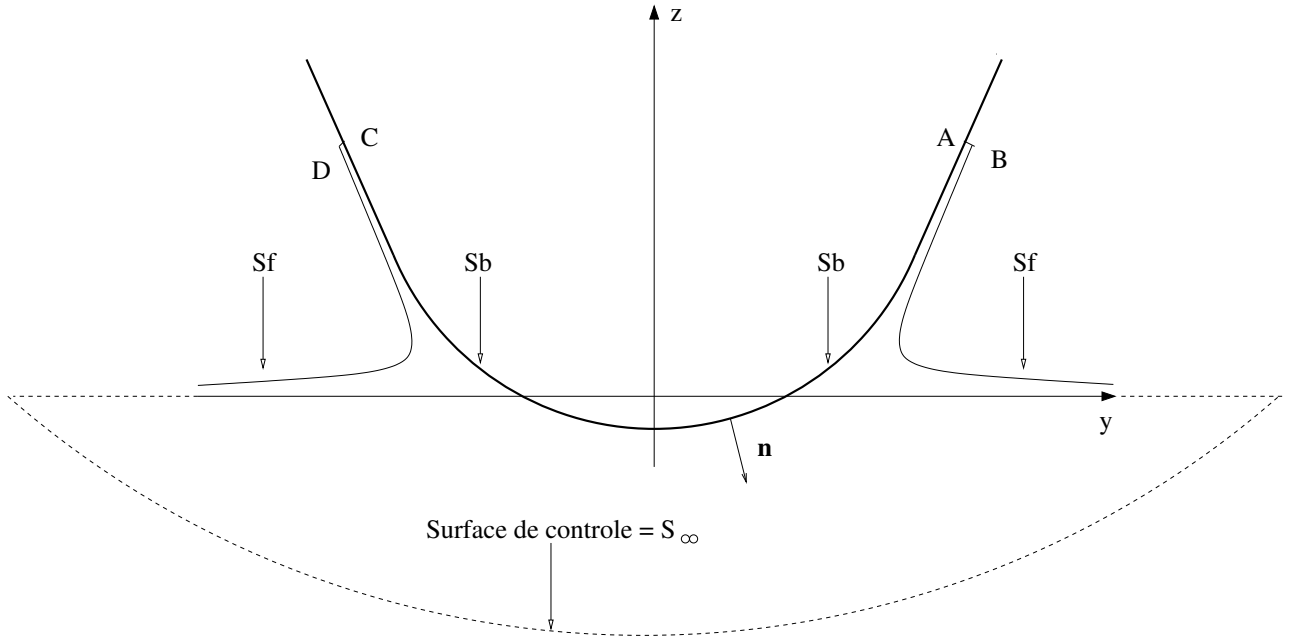


FIG. 2.16 – Définition du domaine fluide instantané utilisé dans la formulation BEM.

l'intérieur du domaine fluide Ω , solution du problème n'ayant subi aucune linéarisation, peut alors être représenté à l'aide de la seconde identité de Green

$$\varphi(P) = \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial\varphi(Q)}{\partial n(Q)} G(P, Q) - \varphi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n(Q)} \right\} ds(Q), \quad (2.31)$$

Chaque point courant Q de coordonnées (x_Q, y_Q, z_Q) , dit "influ  an  t", de la surface $\partial\Omega$ entourant Ω , participe au potentiel des vitesses au point P de coordonnées (x_P, y_P, z_P) , dit influ-

encé. Dans (2.31), $G(P, Q)$ désigne la fonction de Green de l'opérateur Laplacien.

$$G(P, Q) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log r, & r^2 = (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2, & P \in \mathbb{R}^2 \\ -\frac{1}{4\pi r}, & r^2 = (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2, & P \in \mathbb{R}^3 \end{cases} \quad (2.32)$$

La surface $\partial\Omega$ est formée de AB, CD, S_b , S_f et S_∞ . Sa normale en tout point est notée \mathbf{n} . Sur AB et CD la pression peut être approchée par la pression atmosphérique. Pour $|y| > b(t)$, avec $b(t)$ pris arbitrairement grand, l'écoulement peut être représenté par un dipôle vertical dans un domaine fluide infini. Dans un cas 2D, on a alors :

$$\varphi(y, z) = \frac{A(t)z}{y + z}, \quad (2.33)$$

où $A(t)$ est obtenu par la continuité du potentiel des vitesses en $b(t)$. Le fait de prendre $b(t)$ suffisamment grand permet d'avoir une surface de contrôle S_∞ située arbitrairement loin du corps solide. Le fluide peut donc être considéré comme étant au repos sur cette surface. Sa contribution à (2.31) est donc négligeable. A chaque instant, le potentiel des vitesses est connu sur AB, CD, et S_f en amont de $b(t)$. Sur S_b , la vitesse normale $\partial\varphi/\partial n$ est connue.

Pour résoudre numériquement (2.31), les surfaces S_f et S_b sont discrétisées en un certain nombre de segments, sur lesquels φ et $\partial\varphi/\partial n$ sont supposés constants le plus souvent. Le principal atout d'une formulation BEM réside dans le fait que seules les frontières doivent être discrétisées. En pratique, les segments AB et CD, utilisés pour tronquer le jet, ne sont pas introduits immédiatement. Aux premiers instants du calcul, S_f et S_b ont en effet un point de contact commun. Les segments AB et CD ne sont introduits dans la discrétisation que lorsque l'angle entre S_f et S_b devient plus petit qu'une valeur limite, inférieure à $\pi/4$. La résolution de l'équation intégrale (2.31) fournit la vitesse des particules fluides à chaque noeud de la discrétisation. Par interpolation, elle peut donc être calculée en tout point de la surface libre. La position de cette dernière est alors actualisée en intégrant en temps la condition cinématique de surface libre. La manière de procéder est détaillée par [Zhao and Faltinsen, 1992].

Cette formulation est adaptée pour traiter de l'impact de sections de formes arbitraires et de corps axisymétriques ([Zhao and Faltinsen, 1998], [Battistin and Iafrati, 2001]). Le cas d'un coin asymétrique a également été traité par [Iafrati, 2000].

Un certain nombre de "variantes" existent. [Wu *et al.*, 2004] proposent par exemple de remailler la frontière à chaque pas de temps et de faire une approximation linéaire de $\partial\varphi/\partial n$ et φ au lieu d'une simple approximation constante par morceaux. [Kihara, 2004] propose une manière de mieux prendre en compte le jet dans une formulation BEM. Son modèle tire parti de l'étude menée par [Battistin and Iafrati, 2004] sur la modélisation du jet. Dans cette étude, le jet est discrétisé en petits volumes de fluide. Un développement de Taylor du potentiel des vitesses φ_i^J dans un volume de discrétisation V_i ramène la connaissance de ce potentiel dans chaque volume à la connaissance de cinq coefficients. Les conditions de surface libre et de glissement, ainsi que la continuité du potentiel à la frontière entre les différents volumes sont utilisées. Les équations qui en découlent, introduites dans le système linéaire résultant de la formulation BEM du problème dans le reste du fluide, où le potentiel des vitesses est noté $\varphi^B(P)$, permettent de résoudre le problème. Pour raccorder correctement les deux zones, on utilise le potentiel des vitesses :

$$\varphi(P) = (1 - l_i)\varphi^B(P) + l_i\varphi_i^J(P) \quad P \in V_i, \quad (2.34)$$

dans un voisinage de la zone de raccord. Le poids l_i varie linéairement de 0 à 1, du raccord avec le reste du fluide au raccord avec la zone du jet.

2.3 Couplage hydro-élastique

Les méthodes purement numériques présentées en section 2.1 se couplent assez naturellement avec des modèles structuraux. On s'intéresse ici au couplage des modèles en théorie potentielle qui ont été présentés auparavant. Si la littérature est particulièrement fournie dans le cas rigide, elle est moins riche au sujet du problème hydro-élastique couplé. On choisit le plus souvent de représenter la déformation de la structure à l'aide d'un modèle éléments finis ou de la décomposer sur la base de ces modes propres (méthode dite des modes normaux). La difficulté est liée au fait que la déformation de la structure doit être calculée en même temps que les inconnues du problème hydrodynamique (chargements locaux et surface mouillée). Aussi, même si le modèle hydrodynamique est linéarisé, le problème à traiter reste fortement non-linéaire.

Les premiers travaux qui traitent du couplage hydro-élastique dans le cadre de l'impact sont ceux de [Wilkinson *et al.*, 1968] qui couplent une formulation de type [von Karman, 1929] du problème hydrodynamique avec une formulation de type “modes normaux” pour la structure.

L'utilisation du modèle de Wagner linéarisé pour traiter de l'impact d'une poutre [Takagi, 1996] ou de structures formées de poutres reliées entre elle [Kvålsvold, 1994],[Faltinsen, 1997] est tout à fait adaptée. Par la suite, [Ionina and Korobkin, 1999] utilisent également un modèle de Wagner linéarisé pour étudier l'impact hydroélastique d'un cylindre. L'extension à des formes axisymétrique a été réalisée par [Scolan, 2004], qui traite le cas d'un cône élastique. Les cas d'un coin [Khabakhpasheva and Korobkin, 2003] et d'un cylindre élastique [Khabakhpasheva, 2007] sont traités dans le même esprit.

Le couplage d'un modèle de Wagner linéarisé avec une formulation éléments finis de la structure est réalisé dans [Korobkin *et al.*, 2006] pour un coin également. L'extension d'un tel couplage au cas tridimensionnel a été traité [Donguy *et al.*, 2001]. La résolution du problème se fait alors dans son intégralité de manière numérique. [Gazzola, 2007] a également donné des éléments théoriques pour réaliser un couplage hydroélastique avec un modèle de Wagner linéarisé sur des structures tridimensionnelles. Néanmoins, il ne présente qu'un exemple d'application bidimensionnel.

Enfin, les méthodes BEM sont bien adaptées pour réaliser un tel couplage. C'est ce qu'ont réalisé [Tanizawa, 1998], [Sun, 2007] et [Sun and Faltinsen, 2007], en décomposant la déflexion de la structure sur une base de modes normaux. Le couplage avec un modèle élément fini a également été réalisé par [Lu *et al.*, 2000].

2.4 Comparaison du coût CPU des différentes méthodes

Afin de comparer le coût numérique des différentes méthodes exposées précédemment, on s'intéresse au temps de calcul nécessaire pour simuler l'impact d'un coin rigide à vitesse de pénétration imposée. Les résultats, issues de la littérature et de nos propres simulations, sont consignés dans le tableau 2.1. Ils sont donnés à titre informatif car les machines utilisées ne sont

pas les mêmes pour les différentes simulations et les temps de calculs varient en fonction de la valeur de l'angle mort. Ils permettent néanmoins de fixer les idées en ce qui concerne le coût des méthodes les unes par rapport aux autres. Les temps de calculs sont, sauf mention contraire, obtenus sur des postes de travail classiques. Les temps indiqués pour les méthodes SPH et Volumes Finis sont donnés sous forme d'une fourchette. Les valeurs extrêmes correspondent aux discrétisations plus ou moins fines qui peuvent être utilisées.

SPH (10°)	Vol. finis (20°)	VOF (10°)	CIP (30°)	BEM	GWM (10°)	LWM/MLM
8h9mn → 30j2h10mn	20mn→5,5j	16mn35s	16h/26 proc.	~ 20mn	1s582	<1s

TAB. 2.1 – Impact d'un coin rigide - temps CPU pour différentes méthodes de résolution

La même étude comparative peut être menée dans le cas d'un coin élastique. Dans ce cas, les résultats sont consignés dans le tableau 2.2.

SPH	VOF (10°)	GWM	LWM
5j11h17mn → 24j12h52mn	1h35mn35s	~16mn	1mn50s

TAB. 2.2 – Impact d'un coin élastique - temps CPU pour différentes méthodes de résolution

2.5 Conclusions, choix effectués

Dans le cadre des problèmes évoqués dans le chapitre 1, on s'intéresse en premier lieu au calcul des chargements hydrodynamiques engendrés par l'impact sur l'eau des structures considérées. Le calcul fin du comportement du fluide (jet, séparation de l'écoulement) n'a donc que peu d'intérêt dans le sens où ces phénomènes sont rarement dimensionnants. L'utilisation de méthode en théorie potentielle semble donc suffisante et présente de plus l'avantage d'engendrer des coûts de calcul moindres par rapport aux méthodes CFD qui résolvent les équations d'Euler et prennent en compte plus finement le comportement du fluide. Au sein des méthodes en théorie potentielle, la méthode de Wagner généralisée présente un bon compromis entre la méthode de Wagner linéarisée et une méthode complètement non-linéaire de type BEM. Par rapport à un modèle de Wagner linéarisé, l'utilisation d'une méthode généralisée permet de s'affranchir en particulier de la limitation portant sur l'angle mort, dont les valeurs possibles ne sont plus bornées. Cet aspect est particulièrement intéressant lorsqu'on souhaite étudier l'impact de structures élastiques sur l'eau. En effet, les déformations peuvent conduire à ce que l'angle mort dépasse les valeurs limites imposées par la théorie de Wagner linéarisée. Par rapport à une méthode de type BEM, la méthode de Wagner généralisée permet de pousser plus loin les développements analytiques.

Dans cette thèse, on se propose donc d'étudier le modèle de Wagner généralisé, d'abord dans le cadre de l'impact de corps rigides, puis pour des structures déformables.

Chapitre 3

A generalized Wagner model, theory and applications

3.1 Introduction

The two-dimensional water impact of an arbitrary rigid section is considered here. Attention is focused on asymmetric sections, as illustrated in figure 3.1. In the Cartesian coordinates system (Oxy) , the liquid is initially at rest and occupies the lower half plane $y < 0$.

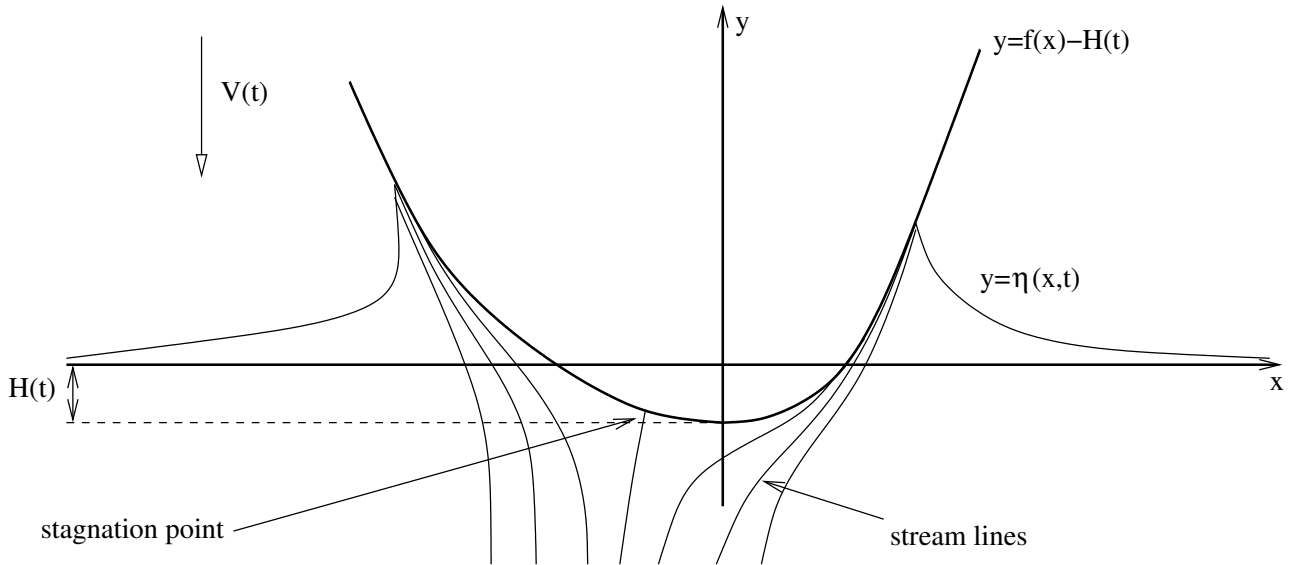


FIG. 3.1 – Configuration of the two-dimensional hydrodynamic impact problem. In the asymmetric case, a stagnation point is observed and does not coincide with the initial contact point

The liquid is assumed to be ideal and incompressible. Both external mass forces and surface tension are neglected. The problem is formulated within the potential flow theory. The flow is described with the velocity potential $\Phi(x, y, t)$. This potential satisfies Laplace equation in the flow region which varies in time. Position of the entering section is given by the equation $y = f(x) - H(t)$, where the function $f(x)$ describes the section shape and $H(t)$ is the penetration depth. $V(t)$ denotes the water entry velocity of the considered section. Here $t(0) = 0$, $f(x) > 0$ for $x \neq 0$, $H(0) = 0$ and $\dot{H}(t) = V(t)$, $V(t) > 0$. The function $y = \eta(x, t)$ describes the free surface elevation during the penetration. The function $\eta(x, t)$ can be multi-valued in general. At the initial time instant, $t = 0$, the body touches the liquid free surface $y = 0$ at a

single point, $x = 0$, which is taken as the origin of the coordinate system and penetrates the liquid thereafter at the velocity $V(t)$. Position of the free surface is unknown in advance and must be determined as part of the solution. Kinematic and dynamic boundary conditions are prescribed at the unknown position of the free surface. The former implies that the free surface is material. The dynamic boundary condition implies that the pressure at the free surface is atmospheric at $t > 0$. This is, the air flow is not taken into account. On the surface of the impermeable body, the kinematic condition prescribes the continuity of the normal velocity. When the body freely penetrates the liquid with a time varying velocity $V(t)$, the free fall problem is closed with Newton law.

Since the pioneering works by [von Karman, 1929] and [Wagner, 1932], several methods of solution have been developed for this problem. A brief review on Wagner models of impact is given below in order to fix ideas.

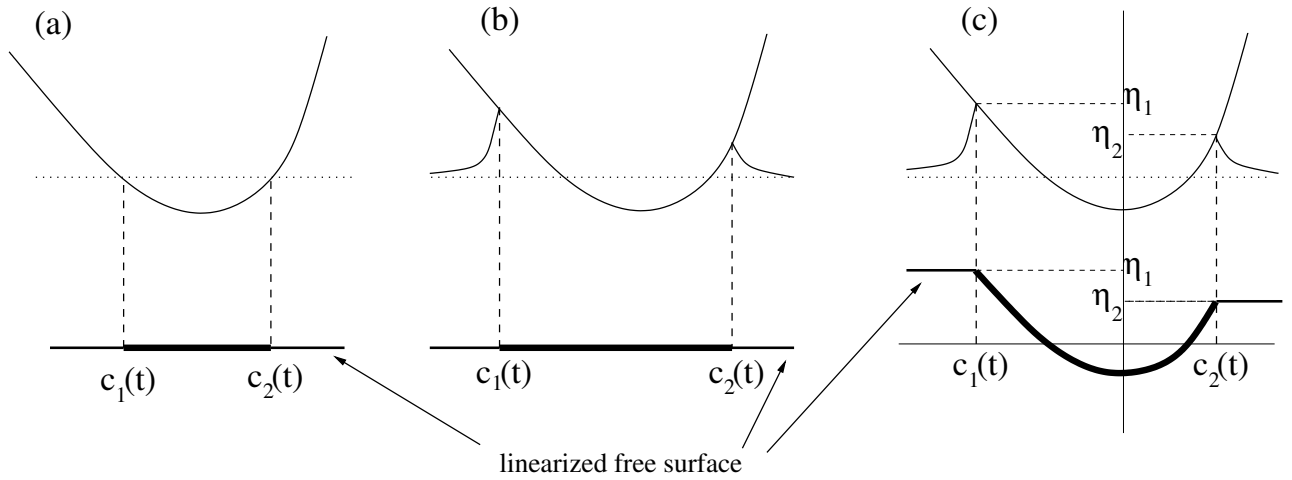


FIG. 3.2 – Different linearizations of the impact problem from Karman’s approach (a) and linearized Wagner model (b) to GWM (c). Sketch above : actual modelled flow. Sketch below : full or partial linearization of the flow domain. In the first two cases, the wetted surface is projected onto a horizontal plane whereas in the last one, its exact position is taken into account

In Karman’s approach, the wetted surface is simply determined by taking the intersection of the body surface with the free surface at rest (see figure 3.2 (a)). Since the water surface elevation is neglected, the added mass and the impact loads are underestimated by this model. As a consequence, a significant error up to a factor two in the prediction of the loads is done. Linearized Wagner model (see figure 3.2 (b)) is based on the so called “flat disk approximation of the wetted surface”, under the assumption that the deadrise angle is small (usually less than 20 degrees). Wetting correction is introduced accounting for the so called “piled-up effect”. The boundary conditions on both wetted and free surfaces are linearized in both Karman and Wagner models. They reduce to an homogeneous Dirichlet condition $\phi = 0$ on the free surface and a Neumann condition on the wetted surface $\phi_{,y} = -V(t)$. The resulting solutions in terms of velocity and pressure are singular at the contact points. Corrections to the original Wagner model were proposed, using matching expansion technique, such as [Cointe, 1991], [Howison *et al.*, 1991]. Another remarkable modification has been proposed by [Logvinovich, 1969]. He proposed to add extra terms into the velocity potential expression in order to make its gradient, *i.e.* the velocity of the flow finite at the contact point. The so-called Modified Logvinovich Method (MLM) [Korobkin, 2004] is of particular interest because it al-

allows us to compute hydrodynamic loads with reasonable accuracy for various two-dimensional shapes.

There are many situations where the linearization of the body boundary condition and wetted surface is not valid any longer. In spite of a fully nonlinear original problem, there are still semi-analytical approaches available to solve the problem for simple shapes such as wedge with arbitrary deadrise angle (symmetric [Dobrovol'skaya, 1969], [Fraenkel and Keady, 2004] or not [Chekin, 2004], [Semenov and Iafrati, 2006]). However, these approaches are not suitable to treat arbitrary shapes. In order to circumvent this limitation, [Zhao and Faltinsen, 1992] proposed to solve the fully nonlinear problem of body entry through a boundary integral equation solved in the time domain. In [Iafrati, 2000], this method of solution is extended to asymmetric sections. This method implies numerics and may require significant computational resources. Hence less expensive models, appropriate for initial design stage, must be developed. In this spirit, [Zhao *et al.*, 1996] built a “simplified” model which is known as Generalized Wagner Model. In this model, free surface is approximated with the horizontal lines emanating from the contact points c_1 and c_2 on both sides of the section (see figure 3.3). The jets that occur during the impact are not taken into account and the dynamic boundary condition is linearized in the same way as in the original Wagner model. The keypoint is that the boundary condition on the wetted surface is not linearized and prescribed on its exact position. Hence there is no theoretical limitation on the deadrise angle. The dynamic boundary condition reduces to an homogeneous Dirichlet condition $\Phi = 0$ while the linearized kinematic boundary condition reads

$$\eta_{,t}(x, t) = \begin{cases} \Phi_{,y}(x, \eta(c_1(t), t), t), & x < 0, \\ \Phi_{,y}(x, \eta(c_2(t), t), t), & x > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

On the wetted surface, the impermeability condition reads $\Phi_{,n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$, where \mathbf{n} is the normal on the section pointing in the fluid domain (see figure 3.3) and \mathbf{V} the velocity of the impacting section.

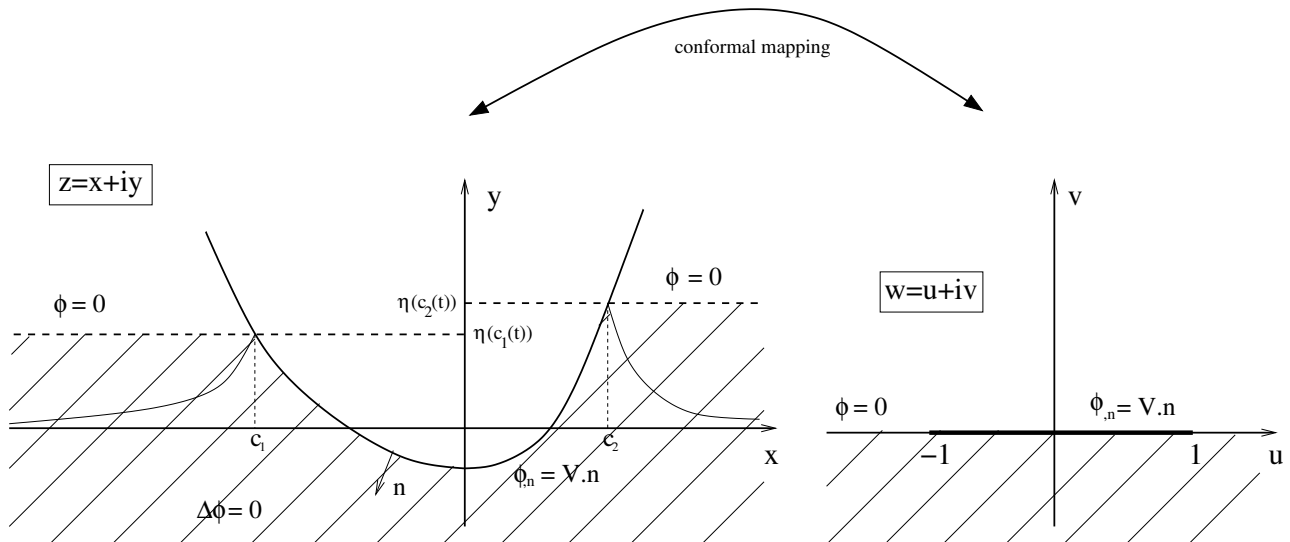


FIG. 3.3 – Asymmetric section impacting liquid. Left : the fluid domain is bounded by the linearized free surface. Right : conformal mappings are used to turn the fluid domain into the lower half plane

[Mei *et al.*, 1999] proposed a method of solution of the Generalized Wagner Model based on conformal mapping of the flow domain. Note that the flow domain varies in time. Appli-

cations were given for two-dimensional symmetric sections. This method has been used by [Yettou *et al.*, 2007], for variable velocity of body penetration. In this approach, the fully non-linear pressure is computed *a posteriori* after having obtained the history of both the wetting correction and the entry velocity by using the linear part of the pressure only. An extension to the three-dimensional case has been proposed by [Faltinsen and Chezhian, 2005]. On the basis of the works by [Mei *et al.*, 1999], we generalize here their method to asymmetric sections. In the present study, we aim at developing robust algorithm to handle arbitrary shapes. To this end, conformal mappings are used to turn the computational domain into the lower half plane as shown in figure 3.3. The free surface is represented by two lines emanating from the contact points on both sides of the impacting body. This linearization makes the problem artificial since the two lines are not at the same level and fluid is artificially added in the problem. The image of the physical body contour is a flat plate in the transformed plane (figure 3.3 right). The way to proceed will be detailed step by step in section 3.2. In section 3.3, the algorithm to solve the resulting problem is presented. Method to compute the flow around the section at a given time instant is developed. To compute the whole time evolution of the system, complementary developments are required such as computation of the wetting corrections, pressure distribution, hydrodynamic force. This is the aim of section 3.4. It is also shown that, in spite of the artificial aspect of the problem, mass conservation law is verified. Results are shown in section 3.5. Comparisons are made with asymmetric and symmetric sections penetrating liquid with constant velocity. Discussion about the problem of the jet is carried out. Then, the problem of free fall impact is considered for both symmetric and asymmetric sections.

3.2 Mapping of the computational domain

As illustrated in figure 3.3, a conformal mapping is used to transform the fluid domain. After this mapping, the body contour is represented by a flat plate. To this aim, several successive transformations are used. For a wide range of shapes, it is possible to perform this transformation routinely. The way to proceed can be broken down as follows :

1. align the two linearized free surfaces (see figure 3.3 left),
2. continue the fluid domain into the upper half plane in order to close the body contour,
3. remove the corners of the body contour,
4. transform the resulting domain so that the body contour is a unit circle,
5. transform the resulting domain so that the body contour is a flat plate.

Each step is detailed in the sequel.

3.2.1 Step 1 : removing the step

As shown in figure 3.3, the approximation of the free surface shape with horizontal lines, in the case of an asymmetric body, yields a difference of levels $h = |e_1 - e_2|$ between the two sides. We note $e_k(t) = \eta(c_k(t), t) = f(c_k(t)) - H(t)$, with $k = 1$ or 2 . The step is removed by using a Schwarz-Christoffel (SC) transformation. In figure 3.4 the points used to define the SC transformation are represented. Point A is located on the left linearized free surface at infinity and D is its analog on the other side. The points B and C are the points of intersection between the vertical axis and the horizontal lines representing the linearized free surface on the left and on the right respectively. After the SC transformation, every points of the free surface are on the same level, namely, on the horizontal axis $\tilde{y} = 0$.

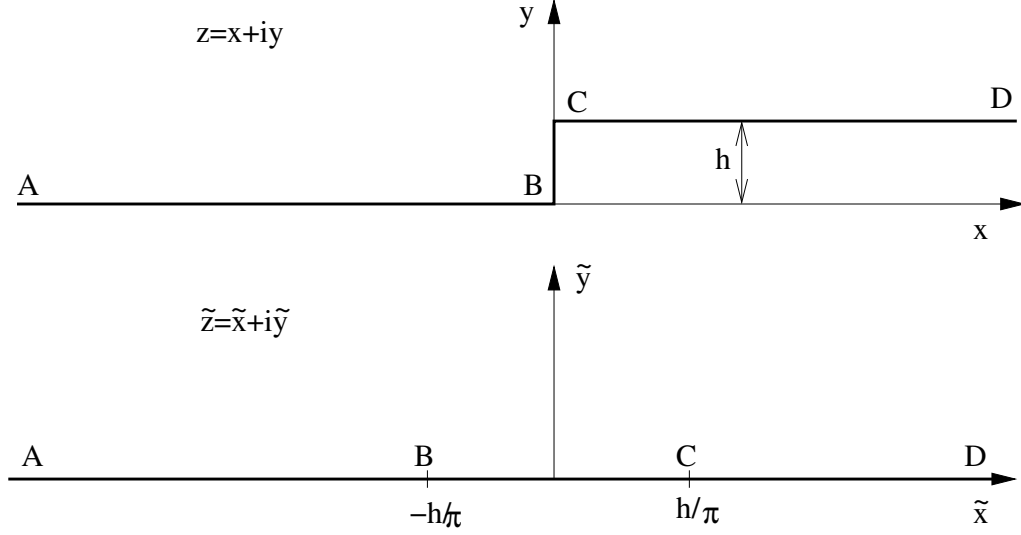


FIG. 3.4 – Points used to define the Schwarz-Christoffel transformation which removes the step; modified physical plane z (above) and associated transformed plane \tilde{z} (below)

The Schwarz-Christoffel transformation is defined through its Jacobian which reads

$$\frac{dz}{d\tilde{z}} = K \sqrt{\frac{\tilde{z} - \frac{e_1 - e_2}{\pi}}{\tilde{z} + \frac{e_1 - e_2}{\pi}}}, \quad (3.2)$$

linking the coordinate in the transformed plane $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ to the coordinate z in the physical plane. The terms of Jacobian usually denote the determinant of the Jacobian matrix, *i.e.* a function that takes its value in \mathbb{R} . By abuse of notation, given a function $F : z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, we called here Jacobian of F , the function $\frac{dF}{dz} : z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

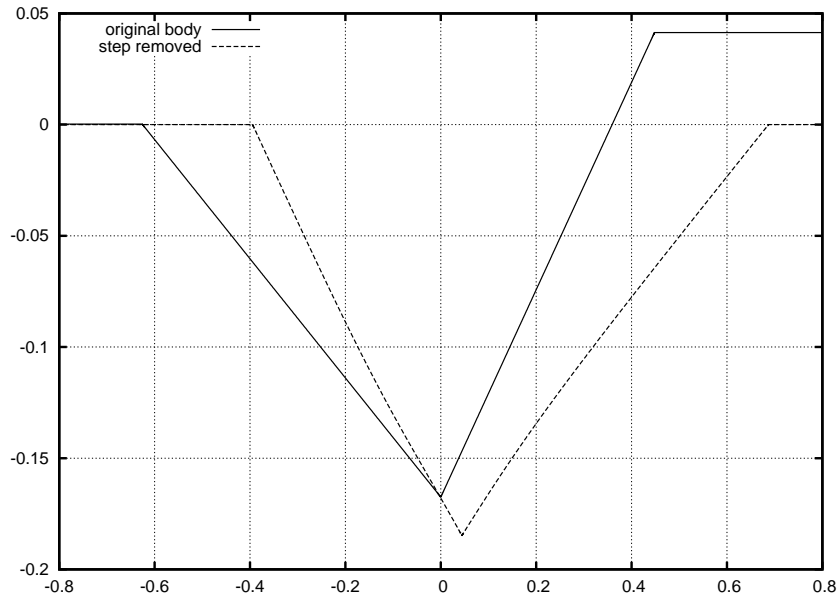


FIG. 3.5 – Asymmetric wedge with interior angle 70 degrees and heel angle 5 degrees (original body) and after removing the step

The choice of the images of B and C at $\tilde{z}_B = -h/\pi$ and $\tilde{z}_C = -h/\pi$ leads to $K = 1$. The link between z and \tilde{z} is deduced from integration of (3.2). The inverse operation is not straightforward but a nonlinear system can be solved by using a Newton's algorithm for example (see appendix A).

In figure 3.5, an illustration is shown for an asymmetric wedge with interior angle equal to 70 degrees and heel angle equal to 5 degrees.

3.2.2 Step 2 : continuation of the solution in the upper half plane

After removing the step, the images of the linearized free surfaces are on the real axis. The homogeneous Dirichlet condition prescribed on the horizontal axis makes it possible to continue the problem symmetrically with respect to the real axis into the upper half plane. It yields a new problem known as “double-body problem”, equivalent to the first one (see [Mei *et al.*, 1999]). This problem is illustrated in figure 3.6.

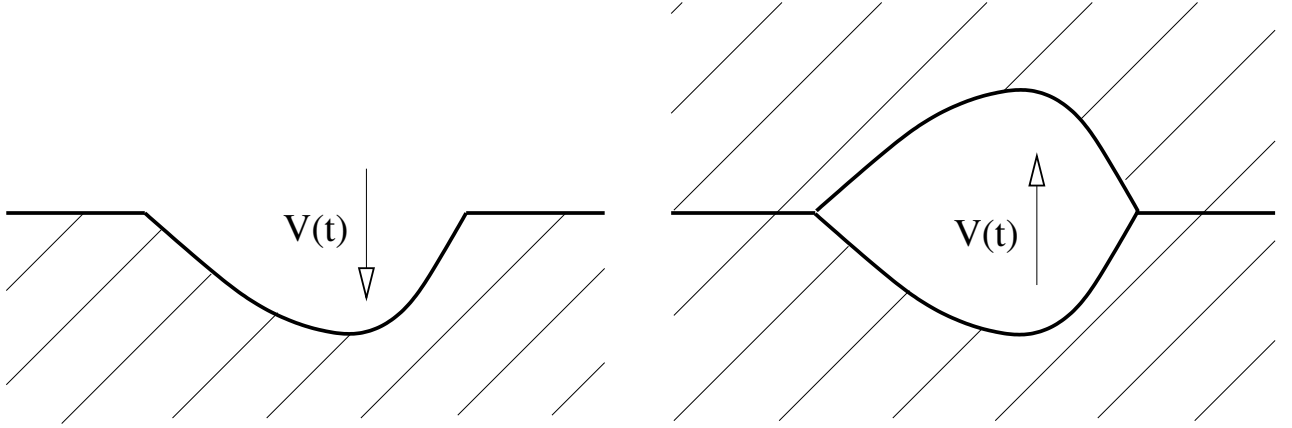


FIG. 3.6 – Sketch of the generalized Wagner problem under two intermediate forms. Left : after removing the step due to the asymmetry. Right : after closing the body contour by continuation in the upper half plane

The introduction of the “double-body” problem of figure 3.6 implies to define a new potential ϕ , in order to make this problem equivalent to the physical one. Hence, the velocity potential Φ , solution of the physical problem is linked to the velocity potential ϕ , solution of the “double-body problem” by

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) - \tilde{y} V(t), \quad (3.3)$$

where (\tilde{x}, \tilde{y}) and (x, y) are linked by the Schwartz-Christoffel transformation (3.2).

3.2.3 Step 3 : removing the corners

The considered section is now closed but it may have sharp corners. The corners are “removed” by using a Karman-Trefftz (KT) transformation [Halsey, 1979]. The number of corners to be removed is noted n . In the present context, $n \geq 2$ necessarily. In general case, n transformations are required to remove n corners. The new complex coordinate ζ_i ($i \leq n$) after i^{th} transformation is linked to ζ_{i-1} , the previous complex coordinate, by :

$$\left(\frac{\zeta_{i-1} - \zeta_c}{\zeta_{i-1} - \zeta_s} \right) = \left(\frac{\zeta_i - \beta \zeta_c}{\zeta_i - \beta \zeta_s} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3.4)$$

where $\beta = \frac{1}{2-\alpha/\pi}$, and ζ_s is the complex coordinate of a singular point within the body. This singular point can be set arbitrarily, for example at the centroid of the section. As a consequence, the transformation is not unique. In the $(i-1)^{th}$ intermediate configuration, ζ_c is the coordinate of the corner to be removed and α is the inner angle of this corner. In the particular case of symmetric shapes, there are two symmetric corners. These two corners can be removed simultaneously (see [Halsey, 1979]). In that case, transformation linking the new complex coordinate ζ_i to the previous one ζ_{i-1} reads :

$$\zeta_i = \beta \zeta_s \left(1 - \left(\frac{\zeta_{i-1} - \zeta_s}{\zeta_{i-1}} \right)^\beta \right)^{-1}. \quad (3.5)$$

This requires to previously place one of the two corners to remove at the origin and to define the second one as the singular point ζ_s . The Jacobian of the transformation (3.5) reads

$$J_{KT} = \frac{d\zeta_{i-1}}{d\zeta_i} = \left(\frac{\zeta_{i-1}}{\zeta_i} \right)^2 \left(\frac{\zeta_{i-1} - \zeta_s}{\zeta_{i-1}} \right)^{1-\beta}. \quad (3.6)$$

When $\zeta_{i-1} = \zeta_s$, $\zeta_i = \beta \zeta_s$. In that case, the Jacobian (3.6) tends to zero and its inverse behaves as $\frac{1}{(\zeta - \zeta_s)^{1-\beta}}$. As $0 < \alpha/\pi < 1$, then $0 < 1 - \beta < 1/2$. Hence, we can exactly extract the singular behaviour of J_{KT}^{-1} .

3.2.4 Step 4 : transformation into an unit circle

At this step, it is first necessary to improve the aspect ratio of the section, in order to make it suitable for the following Theodorsen-Garrick (TG) transformation and to enforce the so-called Warchawski condition (see [Theodorsen and Garrick, 1933]). To this end, a fictitious horizontal plate of half length L is set at the geometric center ζ_c of the body contour. The inverse Joukowski (J) transform, which transforms this plate into a circle is then applied to the body contour after KT transformation. This transformation reads

$$\zeta_n^* = \frac{1}{L} \left((\zeta_n - \zeta_c) + \sqrt{(\zeta_n - \zeta_c)^2 - 4L^2} \right). \quad (3.7)$$

The parameter L can be set arbitrarily. We generally set it to $(c_2 - c_1)/4$ or $(c_2 - c_1)/5$. The TG transformation then leads to a unit circle linking ζ_n^* to $T = re^{i\theta}$ by

$$\zeta_n^* = T \exp \left(\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + i b_k) T^{-k} \right). \quad (3.8)$$

The real coefficients a_k, b_k are computed thanks to a fixed point algorithm. Jacobian of this transformation reads

$$J_{TG} = \frac{d\zeta_n^*}{dT} = \frac{\zeta_n^*}{T} \left(1 - \sum_{k=1}^{\infty} k (a_k + i b_k) T^{-k} \right). \quad (3.9)$$

It is worth using the intermediate complex plane T . In fact, the coordinate x along the physical body contour can be parametrized with the azimuthal coordinate θ and expressed as a Fourier series which reduces to cosine due to symmetry with respect to $y = 0$

$$x(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cos n\theta, \quad (3.10)$$

where A_n are interpreted as Fourier coefficients. It can be shown that the corresponding coordinate y can be written as a Fourier series as well. Due to the asymmetry, $y(\theta)$ is discontinuous at $\theta = -\pi$ or $\theta = 0$. Attention must hence be paid to this discontinuity. In the case of vertical entry, it is shown that the Fourier series (3.10) is needed only.

3.2.5 Step 5 : transformation into a flat plate

The final step of the conformal mapping procedure turns the body contour into a flat plate by using a Joukowski transform. This last one links T to $w = u + iv$ by

$$w = \frac{1}{2} \left(T + \frac{1}{T} \right). \quad (3.11)$$

A practical example of the successive transformations is given in figure 3.7 for the asymmetric wedge with interior angle 70 degrees and heel angle 5 degrees. At each step, the corresponding transformation is given by explicit formula except of stage 4. For the configuration shown in figure 3.7, 256 terms were use in series (3.8).

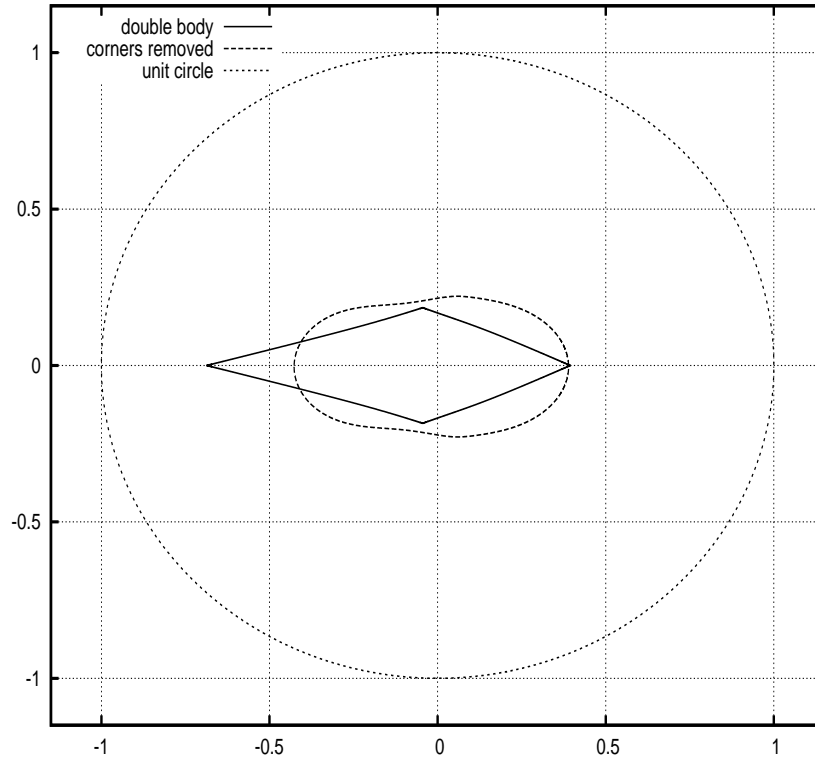


FIG. 3.7 – “Double-body” associated to an asymmetric wedge with interior angle of 70 degrees and heel angle of 5 degrees. The “double-body” is turned into a unit circle. An intermediate step (corners removed) is represented as well

3.2.6 Jacobian of the total conformal mapping

The Jacobian of the conformal mapping must be computed with care since it will explicitly appear in the solution. This Jacobian is noted $J(z)$ and it is broken down as

$$J(z) = \frac{dz}{dw} = \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\zeta}{d\zeta_1} \cdots \frac{d\zeta_{n-1}}{d\zeta_n} \frac{d\zeta_n}{d\zeta_n^*} \frac{d\zeta_n^*}{dT} \frac{dT}{dw}. \quad (3.12)$$

It is singular at the two contact points, noted c for sake of simplicity. The Karman-Trefftz transformation provides the singular behaviour since its Jacobian tends to infinity as $1/(c-x)^\beta$. Since the Jacobian of the Joukowski transformation tends linearly to zero at the contact point, the singularity of the total Jacobian is of order $1-\beta$. It is illustrated in figure 3.8, which shows that in the vicinity of $z = c$, $J(z) \sim A(c-z)^{1-\beta}$, $A \in \mathbb{C}$. While $0 < 1-\beta < \frac{1}{2}$, the singularity is integrable.

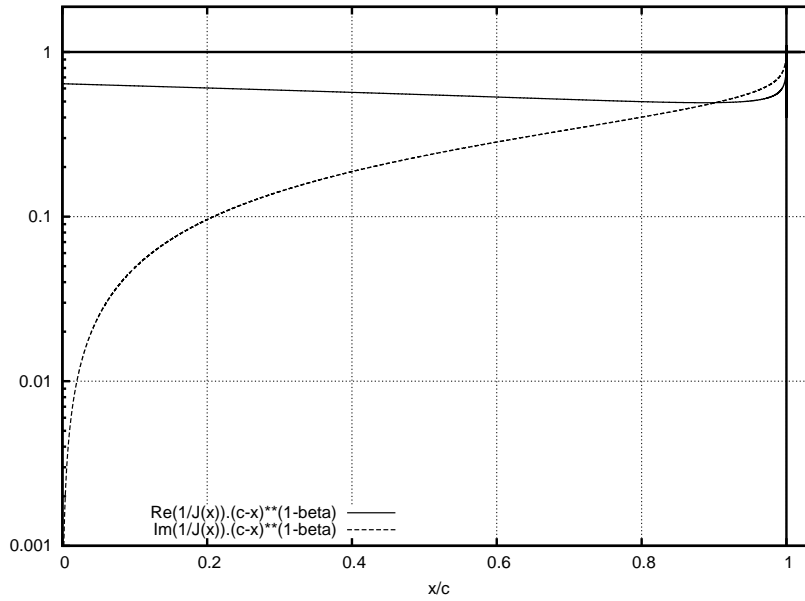


FIG. 3.8 – Singularity inverse Jacobian of the total transformation has an order equal to $1-\beta$

3.3 Boundary Value Problem

After performing the conformal mappings defined in section 3.2, the fluid domain is represented by a simple domain in the plane parametrized by $w = u + iv$. In this plane, the images of the horizontal lines $y = \eta(c_k, t)$, $k = 1$ or 2 , and the body contour coincide with the real axis $v = 0$. In the w -plane, the BVP formulated for the potential ϕ can be represented as in figure 3.9 below.

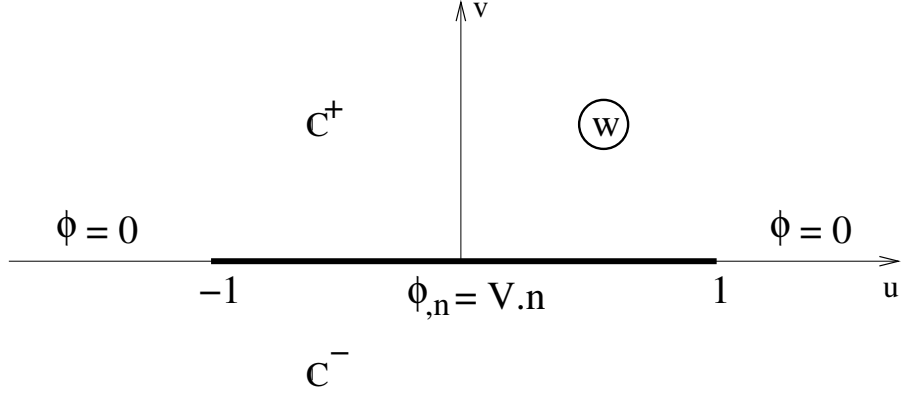


FIG. 3.9 – BVP posed in the w -plane where the body contour is a flat plate. n is the normal pointing into the fluid in the physical plane

The normal vector \mathbf{n} is defined as the normal to the body contour pointing into the fluid. It is linked to the normal in the w -plane on $(u = 0, v < 0)$, that is simply $-\mathbf{i}$ where i is the imaginary unit and \mathbf{i} is the unit vector defined in the complex plane by $(0, 1)$. The physical plane is parametrized by the unit vectors $\mathbf{x} = (1, 0)$ and $\mathbf{y} = (0, 1)$

$$n_x \mathbf{x} + n_y \mathbf{y} = -\frac{J(u)}{|J(u)|} \mathbf{i}. \quad (3.13)$$

The following initial conditions are prescribed

$$\begin{cases} H(0) = 0, \\ \dot{H}(0) = V(0) = V_0, \end{cases} \quad (3.14)$$

3.3.1 Solution of the BVP in the w -plane

One possible method of solution of the BVP represented in figure 3.9 is to formulate the problem as a Riemann-Hilbert problem. Riemann-Hilbert problems have been extensively studied by [Gakhov, 1966]. The solution of the BVP can be obtained under a Cauchy integral form. It means that the solution of the problem at a point of the fluid domain is known from its values of the contour bounding the fluid domain. Reduction under a Cauchy integral form has been detailed by [Gillow, 1998] on the base of [Gakhov, 1966]. Under this form, the solution finally reads

$$\phi(w) + i\psi(w) = \frac{1}{\pi} (1 - w^2)^{1/2} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\xi)}{(1 - \xi^2)^{1/2} (\xi - w)} d\xi, \quad (3.15)$$

with the additional condition

$$\int_{-1}^1 \frac{\psi(\xi)}{(1 - \xi^2)^{1/2}} d\xi = 0. \quad (3.16)$$

This solution has been built in order to obtain a solution bounded in terms of ϕ and ψ at point $w = \pm 1$

3.3.2 Computation of the flow around the section

According to the Cauchy integral form (3.15) of the complex potential, the complete determination of the flow depends on the computation of the stream function ψ on the wetted

surface. On this surface, the impermeability condition can be turned into

$$\phi_{,n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -V \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = -V \frac{dx}{ds}, \quad (3.17)$$

where s is the curvilinear coordinate of a point on the surface of the impacting body. The simple form (3.17) of the impermeability condition is due to the fact that only sections impacting the fluid with a downward velocity are considered. According to the Cauchy-Riemann conditions for the complex potential F , the normal velocity $\phi_{,n}$ is identical to $\psi_{,s}$. By integrating (3.17) with respect to s , we have

$$\psi = -V(x - x_{st}), \quad (3.18)$$

where $x_{st}(t)$ is the coordinate of the stagnation point. Thanks to (3.16) we find that $x_{st}(t) = VA_0(t)$. Since A_0 is the 0^{th} -order coefficient of the Fourier series (3.10) of x , it is equal to zero when the shape is symmetric. This result is not surprising since the stagnation point is expected to be located at the apex in a symmetric water impact. In asymmetric case, it is not the case any longer.

The vertical velocity on the free surface is explicitly required to compute the wetting corrections $c_1(t)$ and $c_2(t)$. Detailed calculations of ϕ and ψ are presented in appendix B. We finally obtain analytical expressions for both ϕ , ψ and $\phi_{,y}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(u, 0, t) = -V(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \cos n\theta - x_{st} \right) \quad |u| < 1, \quad \theta \in [-\pi, 0]. \\ \phi(u, 0, t) = V(t) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\theta \quad |u| < 1, \quad \theta \in [-\pi, 0]. \\ \psi(u, 0, t) = sg(u) \frac{V(t)}{\pi} \sqrt{u^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) I_n(u), \quad |u| > 1. \\ \phi_{,y}(u, 0, t) = sg(u) \frac{V(t)}{J(u) \pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L_n(u), \quad |u| > 1. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

where $J(u)$ is the Jacobian of the conformal mapping, evaluated at the free surface. It hence depends on u and $A_n(t)$ only. The coordinate u of a point on the wetted surface in the flat plate configuration is linked to θ , the azimuthal coordinate of this point in the circle plane, by $\theta = \arccos u$. The function $sg(u)$ is equal to -1 if $u < 0$ and $+1$ if $u > 0$. Functions $I_n(u)$ and $L_n(u)$ follows from recursion formulae. Their expressions are detailed in appendix B.

3.4 Numerical schemes

At this stage, we are able to compute the flow around the impacting section for a given set of wetting corrections. In the next section, we focus on some important aspects of the problem. In particular, time evolution of the wetting corrections must be investigated.

3.4.1 Computation of the wetting correction c_1 and c_2

It is worth reminding that in the linearized Wagner model, time is a parameter. In other words, the solution (wetting corrections, loads...) can be independently computed at any given

time. In spite of many similarities, this is not the case for the generalized Wagner model. Here, the whole time history of the wetted surface expansion must be calculated. The method of calculation is presented in section 3.4.1 for symmetric sections. In asymmetric case, wetting corrections on both sides cannot be computed simultaneously. In that case, a fixed point algorithm must be employed, as shown in 3.4.1. Stability of this algorithm with the regularity of the section is investigated in 3.4.1

Collocation method

For asymmetric sections, two equations must be written to get the two wetting corrections. These equations follow from time integration of the kinematic free surface condition (3.1) written at the two contact points $c_1(t)$ and $c_2(t)$:

$$f(c_k(t), t) - H(t) = \int_0^t \phi_{,y}(c_k(t), \eta(c_k(\tau), \tau), \tau) d\tau, \quad k = 1, 2. \quad (3.20)$$

These two equations are interpreted as a set of two coupled integral equations for c_1 and c_2 . The vertical velocity $\phi_{,y}$ of the free surface is given by (3.19). For a current time of integration τ , it must be determined at the point $c_k(t)$, with $k = 1$ or 2 as illustrated in figure 3.10. At time τ , the shape of the wetted surface is defined by $c_1(\tau)$ and $c_2(\tau)$. Hence, the integrand of the integral equation (3.20) only depends on $(c_k(t), c_1(\tau), c_2(\tau))$.

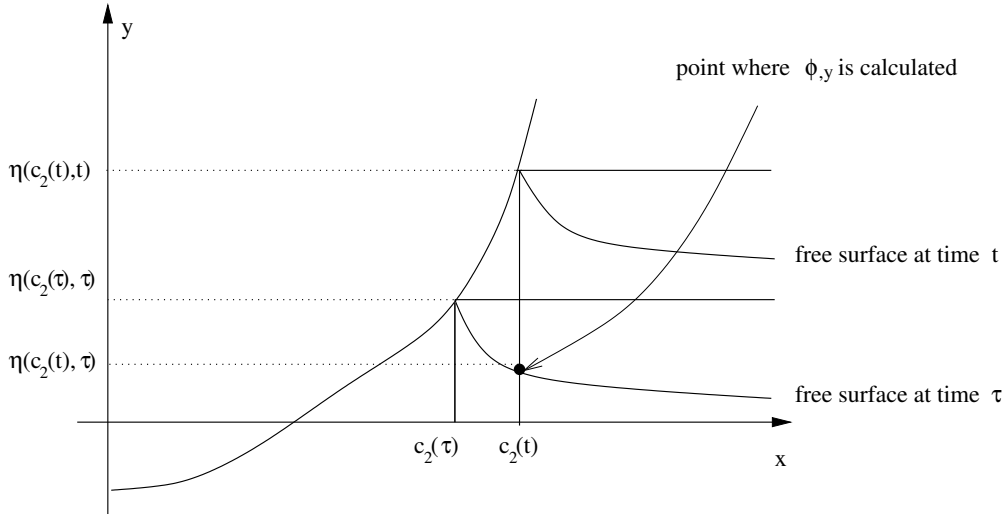


FIG. 3.10 – Computation of the vertical velocity $\phi_{,y}$ at point $c_k(t)$, with $k = 1$ or 2 at a current time of integration τ . At this given time, the shape is defined by $c_1(\tau)$ and $c_2(\tau)$, the wetting correction on the left and right sides respectively

The singularity of $\phi_{,y}$ at the contact point is perfectly known (see section 2.3). The penetration depth $H(t)$ is introduced in the integrand of (3.20) and a new function W is defined as

$$W(c_k(t), c_1(\tau), c_2(\tau)) = 1 + \frac{\phi_{,y}(c_k(t), \eta(c_k(\tau), \tau), \tau)}{V(\tau)}. \quad (3.21)$$

A change of variable $\ell = c_k(\tau)$ for $\tau \leq t$ is performed in (3.20) since c_k is monotonically increasing in time. For $k = 1$ that yields

$$f(c_1(t)) = \int_{c_1(t)}^0 V(\ell) W(c_1(t), \ell, c_2(\ell)) \frac{d\tau}{d\ell} d\ell. \quad (3.22)$$

Following Mei's method [Mei *et al.*, 1999], $V(\ell)\frac{d\tau}{d\ell}$ is broken down as a series of Chebyshev polynomials such as

$$V(\ell)\frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=0}^N a_j^{(1)} T_j(\ell^*) \quad (3.23)$$

where $T_j(\ell^*)$ is the j^{th} Chebyshev polynomials of the first kind with a proper scaling. This scaling is defined so that for $\ell \in [0, C_{max}]$, $\ell^* \in [-1; 1]$. Hence $\ell^* = \frac{2\ell}{C_{max}} - 1$, where C_{max} is an arbitrary value bounding the studied domain in terms of wetting correction. Combining (4.15) and (3.23) we obtain the following equations for $c_1(t), c_2(t)$

$$\begin{cases} f(c_1(t)) = \sum_{j=0}^N a_j^{(1)} \int_{c_1(t)}^0 W(c_1(t), \ell, c_2(\ell)) T_j(\ell) d\ell. \\ f(c_2(t)) = \sum_{j=0}^N a_j^{(2)} \int_0^{c_2(t)} W(c_2(t), c_1(\ell), \ell) T_j(\ell) d\ell. \end{cases} \quad (3.24)$$

A collocation technique is used to discretize (3.24). The wetting correction $c_2(t)$ is set to discrete values over the interval $[0 : C_{max}]$, say $c_2^{(m)}$, the m^{th} zero of the Chebyshev polynomials $T_{N+1}(\ell^*)$. The new set of equations for $c_1(t), c_2(t)$ is highly nonlinear and we solve it by using a fixed point algorithm. Solving (4.15) after substituting its kernel with (3.23) allows us to know the coefficient $a_j^{(1)}$. Once the coefficients $a_j^{(1)}$ or $a_j^{(2)}$ have been computed, the differential equation (3.23) must be solved to evaluate $c_1(t), c_2(t)$. To this end, there are two alternatives :

- In [Mei *et al.*, 1999], (3.23) is rewritten by using a monomial decomposition of $\frac{d\tau}{d\ell}$.

$$V(\ell)\frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=0}^N a_j^{(1)} T_j(\ell^*) = \sum_{j=0}^N b_j^{(1)} \ell^j \quad (3.25)$$

From this point, (3.25) can be directly integrated with respect to ℓ , to obtain a simple relation between τ and ℓ *i.e.* between t and c_1 . The way to convert a Chebyshev series into a monomial one is given in appendix D. However, this method is limited by the fact that for $N > 10$, it is not possible to properly perform the conversion (3.25).

- We hence use the following procedure to compute the wetting corrections from the $a_j^{(k)}$ without using a monomial decomposition. By integrating (3.23), we have to solve at each time

$$H(t) = \left(\frac{c_k}{2}\right)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^N a_j^{(k)} \int_{-1}^1 \frac{T_j(c_k(u+1)/c_{max} - 1)}{(u+1)^\alpha} du. \quad (3.26)$$

By using the decomposition :

$$T_j\left(c_k \frac{(u+1)}{c_{max}} - 1\right) \frac{\sqrt{1-u^2}}{(1+u)^\alpha} = \sum_{m=0}^N a_{jm}^{(k)} T_m(u), \quad k = 1, 2 \quad (3.27)$$

we are able to rewrite (3.26) as

$$H(t) = \left(\frac{c_k}{2}\right)^{1-\alpha} \sum_{j=0}^N a_j^{(k)} a_{j0}, \quad k = 1, 2 \quad (3.28)$$

where a_{j0} is a function of $c_k(t)$.

Fixed point algorithm for asymmetric shapes

The following fixed point technique leads to the converged solution of the nonlinear system :

- initialization : a first guess of $c_1(\ell)$ or $c_2(\ell)$ is needed. Then we use the equation of the linearized Wagner model [Scolan *et al.*, 1999] which reads

$$\int_{c_1}^{c_2} f(x) \sqrt{\frac{c_2 - x}{x - c_1}} dx = \int_{c_1}^{c_2} f(x) \sqrt{\frac{x - c_1}{c_2 - x}} dx. \quad (3.29)$$

By using this equation, we calculate c_1 for a given set of c_2 over the interval $[0 : C_{max}]$. The same is possible for $c_1 \in [-C_{max} : 0]$.

- first step to improve prediction of the wetting correction : system (3.24) is solved yielding the coefficients $a_j^{(1)}$ and $a_j^{(2)}$. It is solved by using the approximated histories $c_1(\ell)$ and $c_2(\ell)$ provided by the linearized Wagner theory.
- better approximation : system (3.24) is solved once more. $c_1(\ell)$ or $c_2(\ell)$ are computed using coefficients $a_j^{(1)}$ and $a_j^{(2)}$ instead of the results provided by the linearized theory.
- successive better approximations are computed until convergence : when the coefficients $a_j^{(1)}$ and $a_j^{(2)}$ do not change any longer, *i.e.* when a given accuracy is reached, the final wetting corrections are computed.

Stability of the computation

The stability of the computational technique is investigated in this section. We consider the following shape functions

$$f_n(x) = |x| \tan \alpha + w_n (1 - \cos n\pi x), \quad (3.30)$$

representing a wedge on which a perturbation is added. Since $f'(x)$ has to be positive, w_n must be small enough. In the following, we set $w_n = 0.03$, $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ in order to verify this condition. Since the shape considered here is symmetric, $a_j^{(1)} = a_j^{(2)} = a_j$. We focus on the first coefficient a_0 of the series defined by (3.23). This value is a function of N , the number of coefficients in the series of Chebyshev polynomials (3.23). For each value of N , the difference between $a_0(N)$ and $a_0(N - 1)$ is plotted in figure 3.11. This quantity gives a criterion of convergence. It shows that the more complicated the shape, the slower the convergence. However, this analysis shows that the algorithm remains efficient. In fact, even for $n = 5$, an accuracy of 10^{-4} is reached with 14 Chebyshev polynomials.

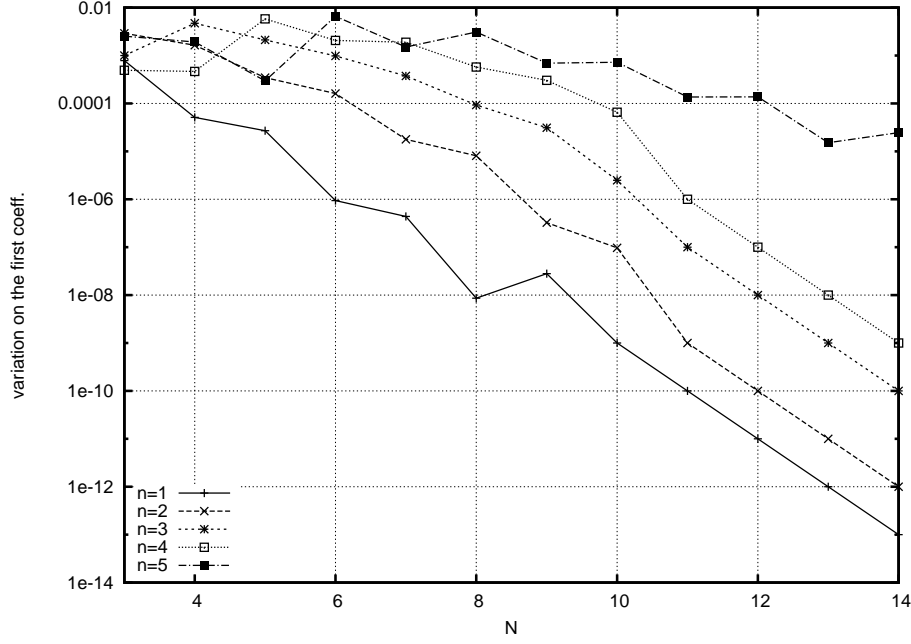


FIG. 3.11 – Variation of the coefficient a_0 when the total number N of coefficient increases.

3.4.2 Computation of the pressure distribution

The pressure acting on the body follows from Bernoulli equation

$$p(x, y, t) = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho (\Phi_{,x}^2 + \Phi_{,y}^2), \quad (3.31)$$

where ρ is the density of the fluid and Φ the velocity potential. Gravity is neglected. The pressure is computed over the wetted part of the body surface but only there where it is positive. By using the relation (3.3) between Φ and ϕ , the linear part of p is written as

$$\Phi_{,t}(x, y, t) = \phi_{,t}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) - \frac{d(\tilde{y}V(t))}{dt}. \quad (3.32)$$

Since the conformal mapping is time dependent, the time derivative of ϕ must be computed with care. It can hence be evaluated by using the following development :

$$\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t + dt) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t) + \tilde{x}_{,t}(t)\phi_{,\tilde{x}}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)dt + \tilde{y}_{,t}(t)\phi_{,\tilde{y}}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)dt + \phi_{,t}(\tilde{x}, \tilde{y}, t)dt, \quad (3.33)$$

to writte $\phi_{,t}$ as

$$\phi_{,t}(\tilde{x}, \tilde{y}, t) = \frac{\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t + dt) - \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t)}{dt} - \tilde{x}_{,t}(u, t)\phi_{,\tilde{x}}(u, t)dt - \tilde{y}_{,t}(u, t)\phi_{,\tilde{y}}(u, t)dt \quad (3.34)$$

In order to properly evaluate the first term in the right hand side of (3.34), we use the transformed plane in which the body contour is a flat plate (see figure 3.3). In that plane, each point (\tilde{x}, \tilde{y}) have an image which coordinates are (u, v) . Since we only consider points on the body contour, their images are such that $v = 0$. Computation are then done in the flat plate plane,

by setting u at a constant value and by evaluating ϕ at two successive times t and $t + dt$ for this value of u .

$$\frac{\phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t + dt) - \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, t)}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \Big|_u = \frac{\phi(u, 0, t + dt) - \phi(u, 0, t)}{dt} \quad (3.35)$$

The time dependance is hence contained in the conformal mapping. This mapping, linking \tilde{x} and \tilde{y} to u , is completely defined in section 3.2. Hence, both \tilde{x}_t and \tilde{y}_t are known and allow us to form the velocities $\phi_{,\tilde{x}}$ and $\phi_{,\tilde{y}}$. It also allows us to compute $\phi(u)$ at time t and $t + dt$. The spatial derivatives of the velocity potential are written by using the complex potential $F = \phi + i\psi$ as

$$\Phi_{,x} = \phi_{,x} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{dF}{dz} \right\}, \quad \text{and} \quad \Phi_{,y} = \phi_{,\tilde{y}} - V = -\operatorname{Im} \left\{ \frac{dF}{dz} \right\} - V. \quad (3.36)$$

According to (3.19), on the body contour we can write

$$\frac{dF}{dz} = \phi_{,x} + i\psi_{,y} = \frac{V}{J(z(\theta)) \sin \theta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (\cos n\theta + i \sin n\theta), \quad (3.37)$$

The quadratic term in (3.31) is essential, since it makes the pressure equal to zero at a point located before the contact point and it makes the pressure finite on its support. The points where the pressure is equal to zero is noted \tilde{c}_1 on the left side and \tilde{c}_2 on the right side. The pressure given by (3.31) is negative in the area delimited by this point and the contact point. This is illustrated by figure 3.12, where the different contributions in the pressure distribution are plotted.

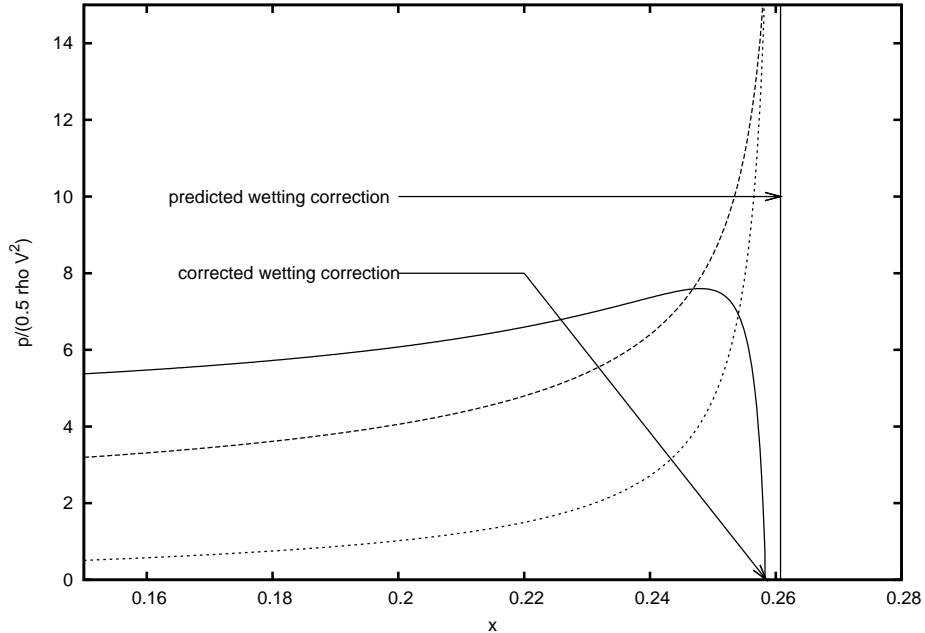


FIG. 3.12 – Computation of the pressure distribution acting on a wedge with a deadrise angle equal to 30° . Sum of the linear (dashed lines) and nonlinear (thin dashed lines) contributions (which is represented here in absolute value)

This approach is the simplest, but not the best one. In fact, for some pathologic configurations, oscillations can occur in the term $\phi_{,t}$. An other way to compute properly this term is to formulate a boundary value problem for this new variable, as it has been done for ϕ (see figure 3.9). By solving this BVP, $\phi_{,t}$ will then be directly known without using finite difference method. Such an approach is used by [Battistin and Iafrati, 2003] and gives very good results.

3.4.3 Hydrodynamic force

The vertical force \mathbf{F} acting on the body is computed by integration of the pressure distribution on the support where the pressure is positive.

$$\mathbf{F} = \int_{\tilde{c}_1}^{\tilde{c}_2} p(x) \mathbf{n} dx. \quad (3.38)$$

The integration is performed numerically by Romberg's method (see [Press *et al.*, 1996] for example).

If the velocity is time varying, Newton's law must be used to close the problem. It reads

$$M \dot{V} = -\rho \int_{\tilde{c}_1}^{\tilde{c}_2} p(x) n_y dx, \quad (3.39)$$

where M represents the mass of the impacting body. It means that the body has only downwards velocity.

By using the formula by [Newman, 1977], an expression of the hydrodynamic force can be obtained :

$$\mathbf{F}(t) = -\rho \frac{d}{dt} \int \int_{WS(t)} \phi(x, y, t) \mathbf{n} dS \quad (3.40)$$

where $WS(t)$ denotes the wetted surface. The vertical component of the normal along the body contour is

$$n_y = \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} = \frac{dx}{d\theta}. \quad (3.41)$$

Hence

$$F_y = -\rho \frac{d}{dt} V \int_{-\pi/2}^0 \phi(x, y, t) \left(\frac{dx}{d\theta} \right) d\theta. \quad (3.42)$$

According to the definition (3.10) of x as a function of θ , the vertical component of the force is simply :

$$F_y = \rho \frac{\pi}{2} \frac{d}{dt} V \sum_{n=0}^{\infty} n A_n^2 = \frac{d}{dt} (M_a V), \quad (3.43)$$

where M_a is a function of the wetted surface geometry only and reads

$$M_a = \rho \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2. \quad (3.44)$$

This definition of the added mass can be linked to the definition by [Scolan and Etienne, 2008]. Since M_a can be much larger than M , the quantity $M_a \dot{V}$ is added to both sides of (3.39) in order to make the integration scheme more stable [Sun, 2007], [Malleron and Scolan, 2007].

Since the considered section is symmetric, the horizontal component of the force is equal to zero. If only half of the section is considered, the horizontal force acting onto this half section is given by

$$F_x = -\rho \frac{d}{dt} \int \int_{WS(t)} \phi(x, y, t) n_x dS. \quad (3.45)$$

The condition

$$n_x = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = \frac{dy}{d\theta} \quad (3.46)$$

yields

$$F_x = -\rho \frac{d}{dt} V \int_{-\pi/2}^0 \phi(x, y, t) \left(\frac{dy}{d\theta} \right) d\theta. \quad (3.47)$$

In the same spirit than x (see equation 3.10), y can be written as a Fourier series

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (3.48)$$

As a consequence,

$$F_x = -\rho \frac{d}{dt} V \sum_{n=0}^{\infty} n A_n \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_{-\pi/2}^0 \sin n\theta \cos m\theta d\theta \quad (3.49)$$

and

$$\int_{-\pi/2}^0 \sin n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} \frac{\cos n\pi - 1}{4n} & \text{if } m = n \\ \frac{n \cos \frac{m\pi}{2} - n + m \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 - m^2} & \text{if } m \neq n \end{cases} \quad (3.50)$$

Computational results in terms of horizontal force are presented in section 4.4.3. Order of magnitude of the horizontal component are compared to the vertical one for various shapes.

3.4.4 Capsizing sections

If asymmetric sections are considered and if they are let free to rotate around their apex, the second equation of the dynamic must be used to compute the time history of the heel angle, noted θ .

By using the added mass coefficient,

$$m_{ij} = \rho \int \int_{WS(t)} \phi_i \phi_{j,n} ds, \quad (i, j) \in (2; 6 \times 2; 6), \quad (3.51)$$

the vertical force \mathbf{F} and the moment \mathbf{M} acting on the section can be computed as

$$\begin{cases} \mathbf{F} = -\frac{d}{dt} \left(V m_{22} + \dot{\theta} m_{26} \right) \mathbf{y}, \\ \mathbf{M} = -\frac{d}{dt} \left(V m_{62} + \dot{\theta} m_{66} \right) \mathbf{z}, \end{cases} \quad (3.52)$$

Here it is considered that the system has only two degrees of freedom. Index 2 corresponds to the vertical translation and index 6 corresponds to the rotation around the apex. As a consequence only the 4 terms m_{22} , m_{66} , m_{62} and m_{26} , are different from zero in (3.51).

The velocity potential of the flow must now be sought in the form $\phi = V\phi_2 + \dot{\theta}\phi_6$, where θ represents the angle of rotation of the section around its apex. ϕ_2 is the solution of the previous problem, corresponding to the vertical motion of the section and ϕ_6 is the solution linked to the rotation around the apex. These two potentials are solutions of the following two BVP respectively (see [Newman, 1977] p. 137)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_2 = 0, & D(t) \\ \phi_2 = 0, & FS(t) \\ \phi_{2,n} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}, & WS(t) \\ \phi_2 \rightarrow 0, & x^2 + y^2 \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_6 = 0, & D(t) \\ \phi_6 = 0, & FS(t) \\ \phi_{6,n} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{z}, & WS(t) \\ \phi_6 \rightarrow 0, & x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad (3.53)$$

where \wedge denotes the cross product and $\mathbf{r} = (x, y, 0)$. Solution of the first BVP is perfectly known since the normal \mathbf{n} is known (see section 3.3). The second one can be solved according to the Cauchy-Riemann condition

$$\phi_{6,n} = (\mathbf{r} \wedge \mathbf{n}) \cdot \mathbf{z} = -x \frac{dx}{ds} - y \frac{dy}{ds} = \psi_{6,s}. \quad (3.54)$$

As a consequence, the stream function reads

$$\psi_{6,n} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + K, \quad (3.55)$$

where K is a constant of integration which can be arbitrary set to zero. By using (3.19), ϕ_6 is obtained under the form

$$\phi_6(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \cos n\theta, \quad (3.56)$$

Since both ϕ_2 and ϕ_6 are known, the added mass of the problem can be computed according to (3.51). An example of application is given in section 3.5.6.

3.5 Applications and results

The present model is applied to various shapes. First, the classical problem of the wedge water entry is considered. In this case, self-similar solutions are available for both asymmetric [Semenov and Iafrati, 2006] and symmetric cases [Dobrovol'skaya, 1969]. Pressure distributions are compared and discrepancies are evaluated. Other asymmetric shapes are studied : they are defined with polynomials and they are smooth at the contact point *i.e.* at the intersection point between free and wetted surfaces. First, we deal with the case of constant entry velocity V (section 3.5.1 to 3.5.3). The case of a variable velocity entry is also considered (section 3.5.4 and 3.5.5). To this end, a particular attention is paid to the calculation of the pressure and of the resulting force acting on the sections.

3.5.1 Asymmetric wedge at constant velocity entry

The asymmetric section of a wedge with inner angle α and heel angle δ is considered here. The pressure distribution calculated $C_p = \frac{p}{0.5\rho V^2}$ is plotted in figures 3.13 and 3.14. The present solution (GW) is compared to the similarity solution (Sim.) by [Semenov and Iafrati, 2006] for $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 60^\circ$ and $\delta = 10^\circ$ or $\delta = 20^\circ$ in each case.

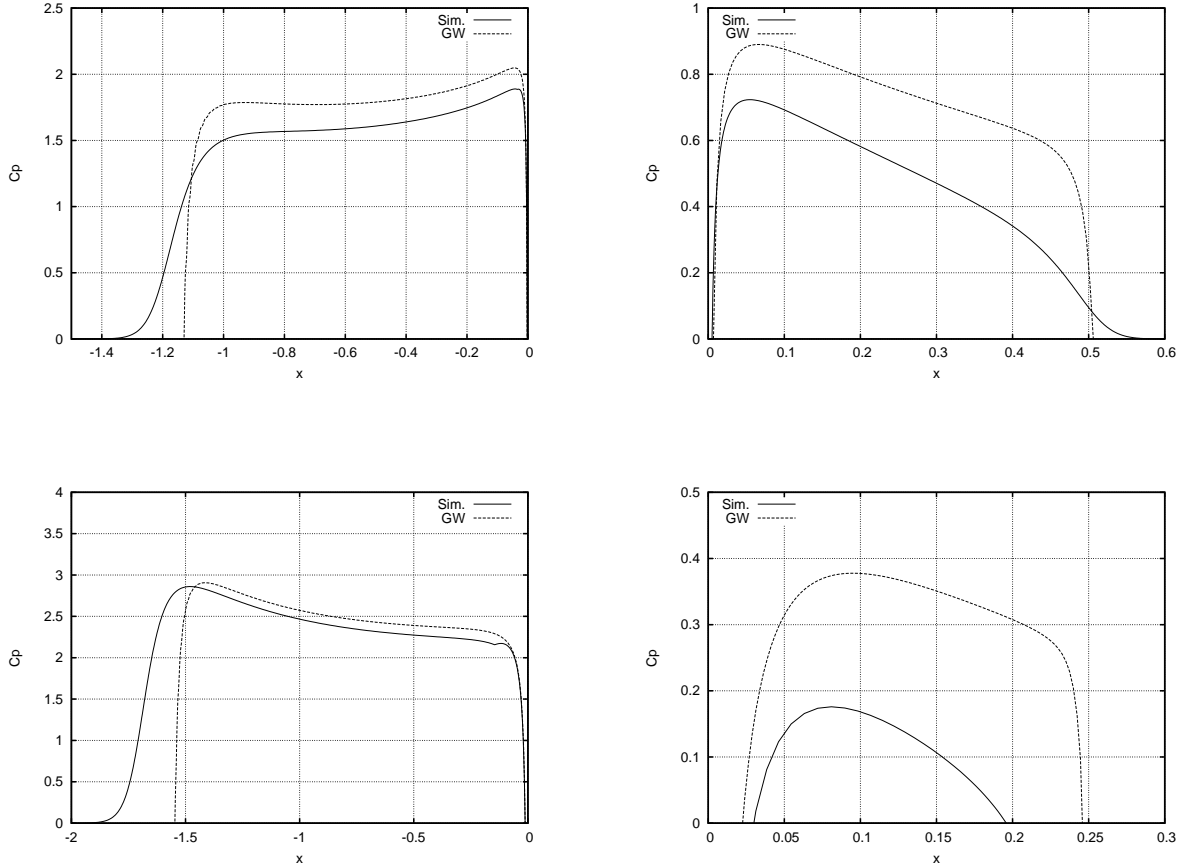


FIG. 3.13 – Pressure distribution on both sides of an asymmetric wedge with $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 10^\circ$ (top) and $\delta = 20^\circ$ (bottom)

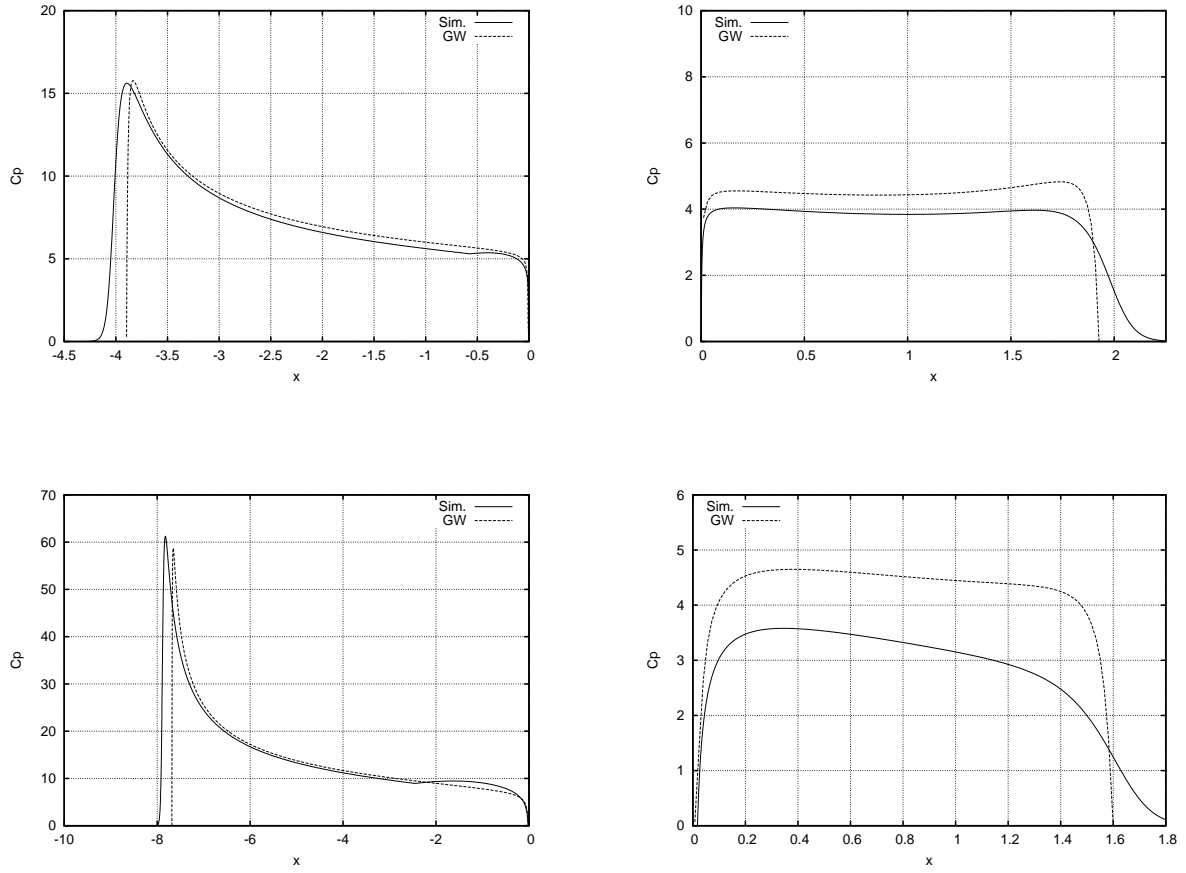


FIG. 3.14 – Pressure distribution on both sides of an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$, $\delta = 10^\circ$ (top) and $\delta = 20^\circ$ (bottom)

Maximum values of the pressure on the left (p_{max}^L) and the right (p_{max}^R) are reported in table 3.1 for the different configurations. Columns with a star correspond to the data by [Semenov and Iafrati, 2006] corresponding to the similarity solution.

TAB. 3.1 – Coordinate of the stagnation point (x_{st}) and maximum of the pressure distribution on the left (p_{max}^L) and the right (p_{max}^R) side of an asymmetric wedge for $\alpha = 60^\circ$ and various values of δ

δ	x_{st}	x_{st}^*	p_{max}^R	p_{max}^{R*}	p_{max}^L	p_{max}^{L*}
0	0	0	7.20	6.89	7.20	6.93
5	-0.195	-	5.92	5.07	10.36	9.96
10	-0.545	-0.570	4.83	3.96	15.76	15.61
15	-1.114	-	4.79	3.76	26.86	27.72
20	-2.325	-2.444	4.65	3.58	58.76	61.25

In terms of maximum of pressure, the relative error between the present solution and the similarity solution never exceeds 4% on the left side. On the right side the error is higher. However, its contribution to the total hydrodynamic force is very small compared to the other side, while both the amplitude of the pressure and the wetted surface are smaller. We define

C_{nR} and C_{nL} as the results of pressure integration on the right and the left parts of the modified wetted surface made dimensionless with $\frac{1}{2}\rho V^2$. When $\delta = 20^\circ$, the ratio C_{nL}/C_{nR} is about 16.2 for a deadrise angle $\alpha = 60^\circ$ while for $\alpha = 30^\circ$, it is about 57.2. For smaller heel angle ($\delta = 10^\circ$), *i.e.* for a smaller error on the pressure, the ratio C_{nL}/C_{nR} is about 3.4 and 5.4 for $\alpha = 60^\circ$ and 30° respectively.

The pressure distribution shows a singularity at the apex where a negative pressure zone appears. This singularity appears in the similarity solution as well. In fact, because of the sharp corner at the apex, a separation occurs as well as a vortex accumulation on the side of largest deadrise angle. The phenomenon is illustrated in figure 3.15. It has been described experimentally by [Judge *et al.*, 2004]. Such a phenomenon can not be taken into account in a potential approach. Hence, it is not suitable anymore in a close neighborhood of the apex. A local solution, taking into account the vorticity can be used in this area, in order to better predict the pressure near the apex. [Riccardi and Iafrati, 2004] proposed such a model, prescribing a Kutta condition at the apex. The coupling between the present solution and the local solution is not performed here however.

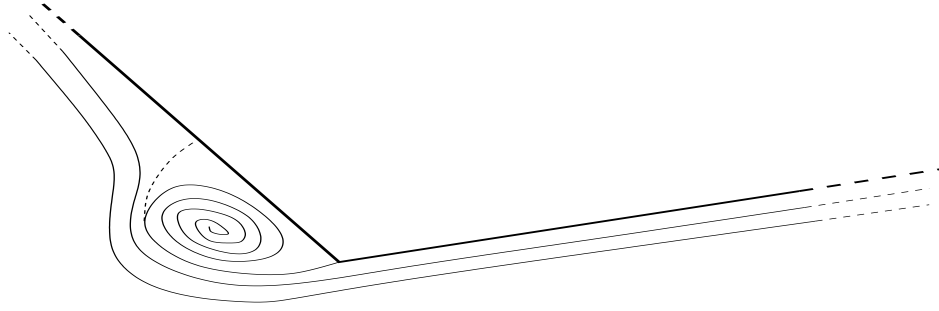


FIG. 3.15 – Sketch of the streamlines of the vortex flow appearing at the apex of an asymmetric wedge during water entry

As shown in table 3.1, the position of the stagnation point is well predicted. However, the particular behaviour of the pressure distribution at this point (local minimum), predicted in [Semenov and Iafrati, 2006] does not appear at all. The reasons for which this local variation occurs are still unclear.

As shown by (3.38), hydrodynamic force is computed by integration of the pressure. This integration is not performed on the whole wetted surface but on a modified wetted surface, which is bounded by \tilde{c}_1 and \tilde{c}_2 . On this area, the pressure is positive. The discrepancy between c_i and \tilde{c}_i , $i = 1..2$ is plotted in figure 3.16 for $\alpha = 60^\circ$. This value increases with the heel angle but remains small ($< 2\%$). It is worth mentioning that in this small area, pressure varies substantially. The form of the pressure distribution is very different on each side of the wedge (see fig. 3.13 and 3.14). As a consequence, the behaviour of the modified wetting correction is not the same. On the left side, the larger the heel angle, the smaller the correction. On the other side it is the contrary. The calculated slamming parameter $C_f = C_{nR} \sin(\alpha - \delta) + C_{nL} \sin(\alpha + \delta)$ is plotted in figure 3.17 and compared to the similarity solution. The discrepancy between the present results and similarity solution increases with the heel angle. As long as the heel angle is smaller than 15° ($\frac{\delta}{\pi} = 0.083$), the error is smaller than 1 %. For bigger values, the present model overestimates the slamming parameter (16 % at $\delta = 20^\circ$ ($\frac{\delta}{\pi} = 0.111$)) and the discrepancy increases rapidly. In fact, for such a value of the heel angle, the maximum deadrise angle is equal to 80° . In such a case the pressure is overestimated as illustrated for a symmetric case in the corresponding section 5.2.

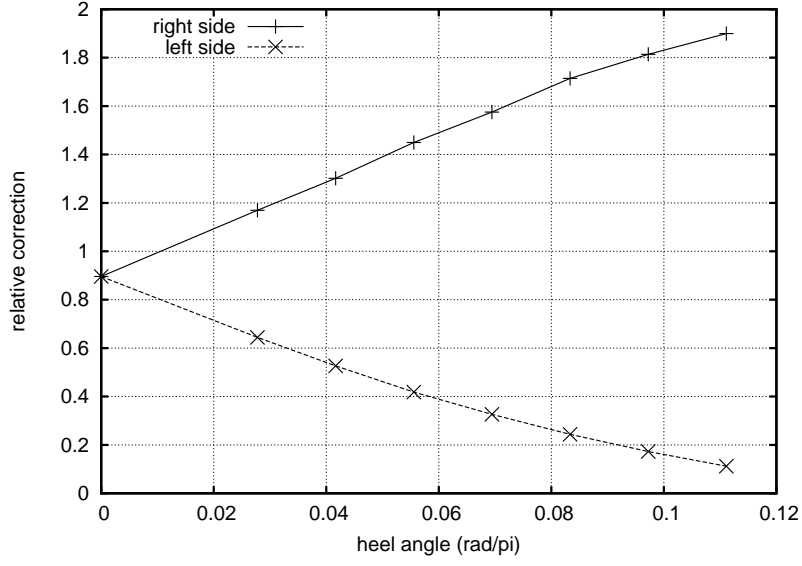


FIG. 3.16 – Relative error $100 \times \left(\frac{c_i - \tilde{c}_i}{c_i} \right)$, $i = 1, 2$ versus heel angle for an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$

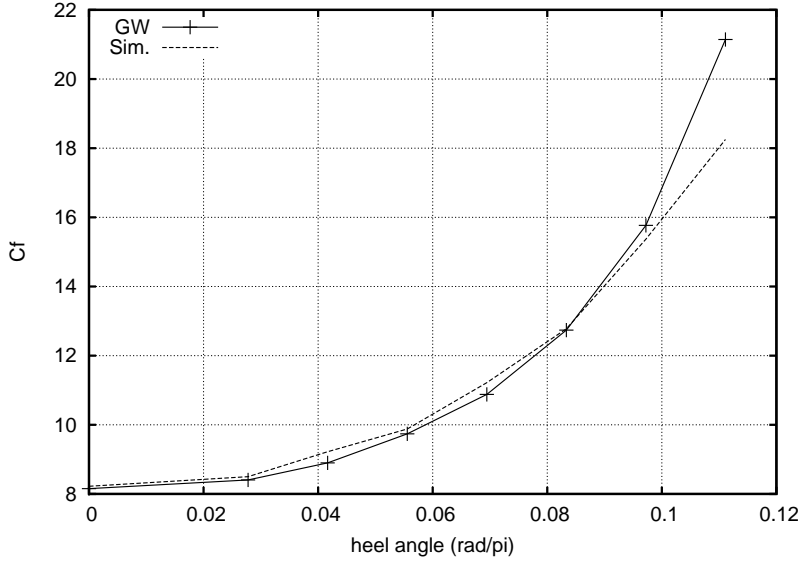


FIG. 3.17 – Slamming parameter for an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$

3.5.2 Symmetric wedge at constant velocity entry

The pressure distribution acting on symmetric wedges with deadrise angles β varying from 10 to 80 degrees are represented in figure 3.18. As mentioned in the introduction, the fully nonlinear problem can be solved quasi-analytically [Dobrovolskaya, 1969] or numerically by a

Boundary Element Method (BEM) [Zhao and Faltinsen, 1992]. The results obtained by these two methods are in very good agreement as shown in [Zhao and Faltinsen, 1992]. In figure 3.18, results by the present model are compared to BEM results.

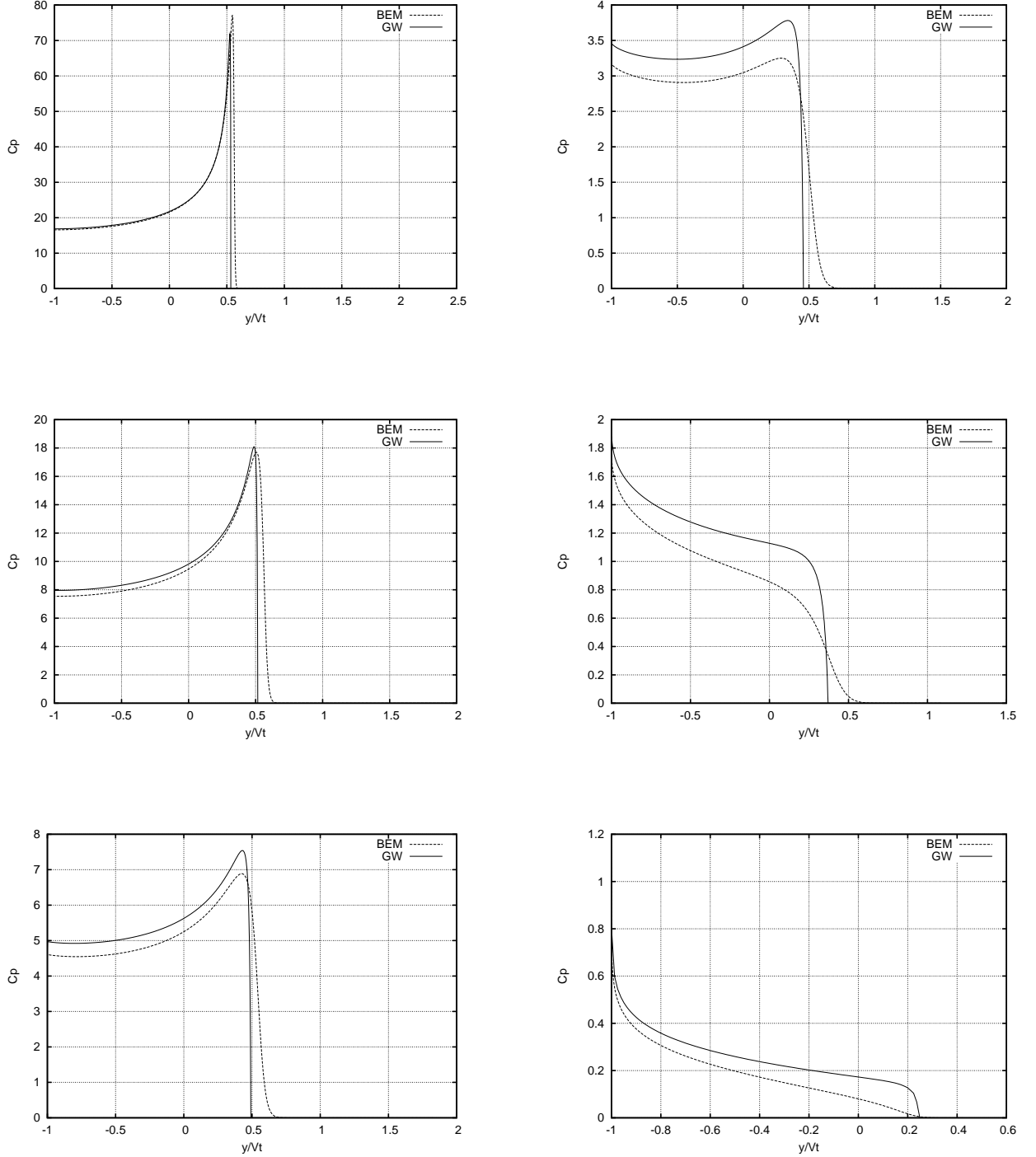


FIG. 3.18 – Pressure distribution acting onto a symmetric wedge during impact at constant velocity for $\beta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ and 80° (from top to bottom and left to right).

In terms of pressure, results by the present model are identical to those by [Mei *et al.*, 1999]. In fact, Mei *et al.* used a quasi-analytical conformal mapping, usable for the wedge only. Since each new shape required the definition of a new conformal mapping in their method of solution, they also developed specific conformal mapping for circular cylinder and Lewis form. For small values of the deadrise angle, the maximum of the pressure is obtained close to the contact point. For deadrise angles larger than 40° , the maximum of the pressure is located at the apex. This typical behaviour is well predicted in both present model and BEM. It can be shown that like in a linearized Wagner model, this maximum of pressure is varying like the square of the expansion velocity of the wetted surface. The important difference between the present generalized Wagner model and the linearized model is that the linearized one does not allow to treat of wedges with a deadrise angle larger than 30° whereas the present solution remains in good accuracy with BEM for all the values of the deadrise angle.

3.5.3 Other impacting shapes and some limitations of the model

By dealing with more complicated shapes, we can exhibit some limitations of the present formulation. To this end, circular cylinder and non-circular cylinder, but also bow section and asymmetric section of a smooth body are successively studied in the following sections. In each case, the half length of the section is noted R .

Cylindrical sections

The shape function of the non-circular cylinder f^* is obtained by adding a small perturbation at the circular shape $f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$ as follow

$$f^*(x) = f(x) (1 + 0.2 \cos(2\pi x)). \quad (3.57)$$

The resulting shape is plotted in figure 3.19.

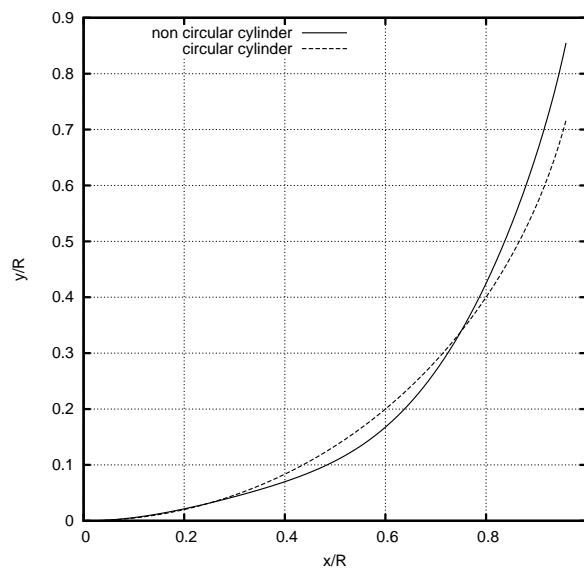


FIG. 3.19 – Sections of a circular and non-circular cylinder

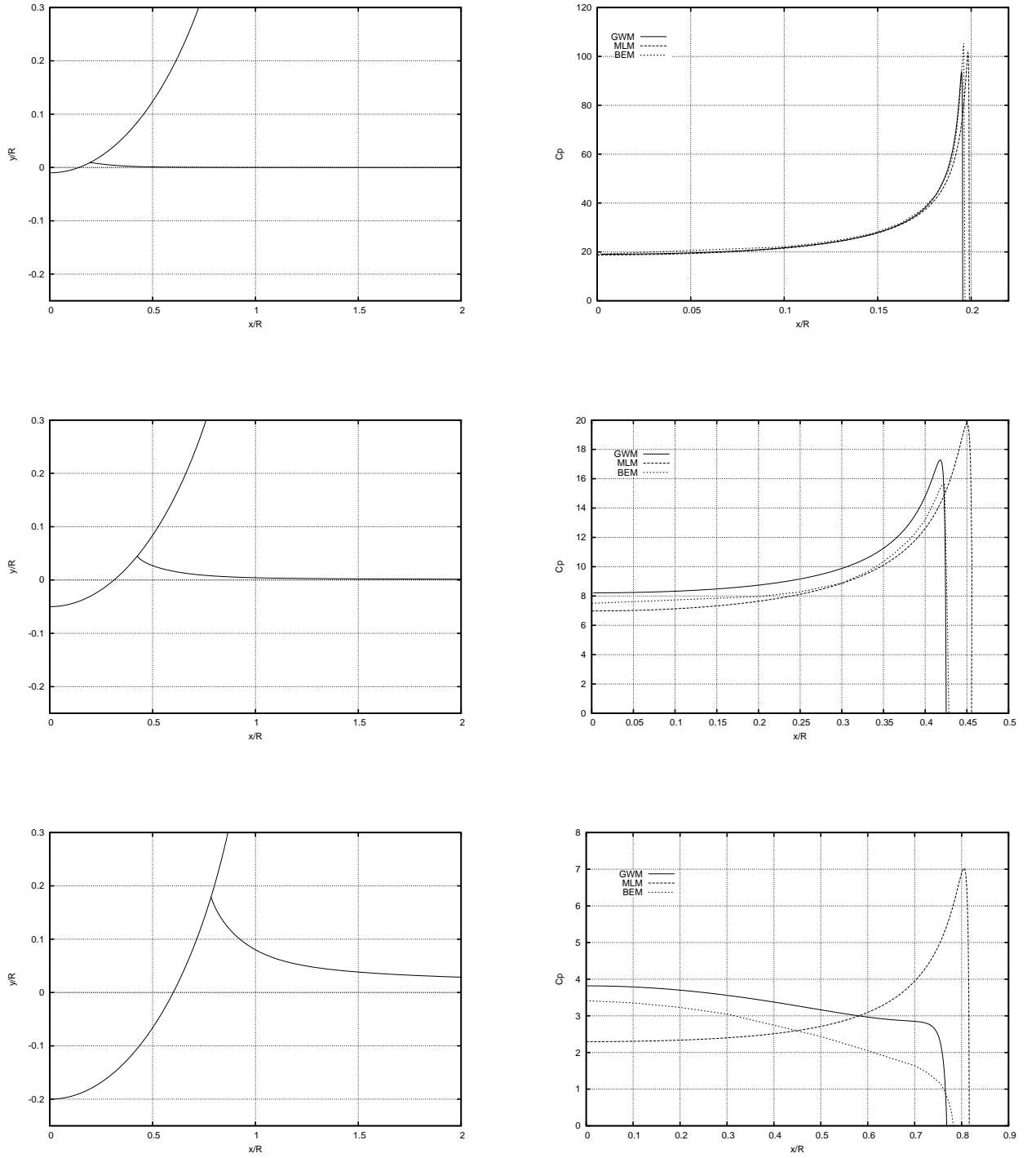


FIG. 3.20 – Free surface profiles (left) and pressure distribution (right) acting on a circular cylinder at three different instants of penetration ($Vt/R = 0.01$; $Vt/R = 0.05$; $Vt/R = 0.2$)

Impact problem of a circular cylinder is of interest since the deadrise angle grows with the penetration. Hence, a generalized approach, without restriction about the deadrise angle is required. Figure 3.20 shows the free surface elevation (left), given by (4.9) and the dimensionless distribution of pressure $C_p = p / (\frac{1}{2}\rho V^2)$ acting on a circular cylinder at constant velocity entry (right) at three different instants. Results on the pressure obtained with the present model are

compared to MLM [Korobkin, 2004] and to BEM solution of the fully nonlinear problem. As the deadrise angle increases with time, the maximum of the pressure does not remain close to the contact point but moves to the apex, like in the case of a large deadrise angle wedge. This phenomenon, well predicted by a BEM approach, does not occur in MLM.

An important limitation of the present model is that separation of the flow is not taken into account. Experiments performed by [Greenhow and Lin, 1983] show the occurrence of such a phenomenon for a circular cylinder in free fall. This aspect of the problem is not developed in this section. It will be discussed in the next chapter (section 4.1).

The history of the non-dimensional parameter C_f is plotted in figure 3.21. The present model is compared to BEM and to experimental data by [Campbell and Weynberg, 1980] (Exp.) for the circular cylinder. In spite of the limitation involved by the separation, the present model allows to predict the hydrodynamic force efficiently, except at the very early stage of the impact. In that case, the force is underestimated. It shows that the added mass approximation $F = \frac{d}{dt}(M_a V)$ overestimates the hydrodynamic force of about 20%. However the maximum of the force is well approximated by this way.

The small perturbation (3.57) of the shape of the circular cylinder induces a change of behaviour of the system. In fact, figure 3.22 shows that the slamming parameter C_f is not monotonically decreasing anylonger. On the contrary, it reaches a maximum when $Vt/R = 0.038$. This maximum of the force is reached when the wetting correction corresponds to the point where the concavity is maximum. The discrepancy between MLM and the present model is always smaller than 2.8 %.

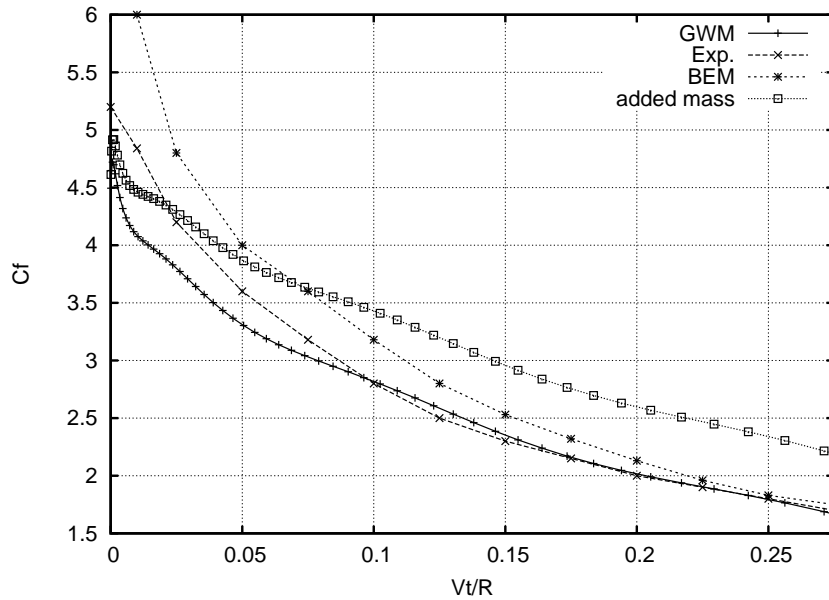


FIG. 3.21 – History of the hydrodynamic force $C_f = F/(\rho V^2 R)$ acting onto a circular cylinder. Results of the present model (GWM) and added mass approximation are compared to the experimental results (Exp.) by [Campbell and Weynberg, 1980] and BEM.

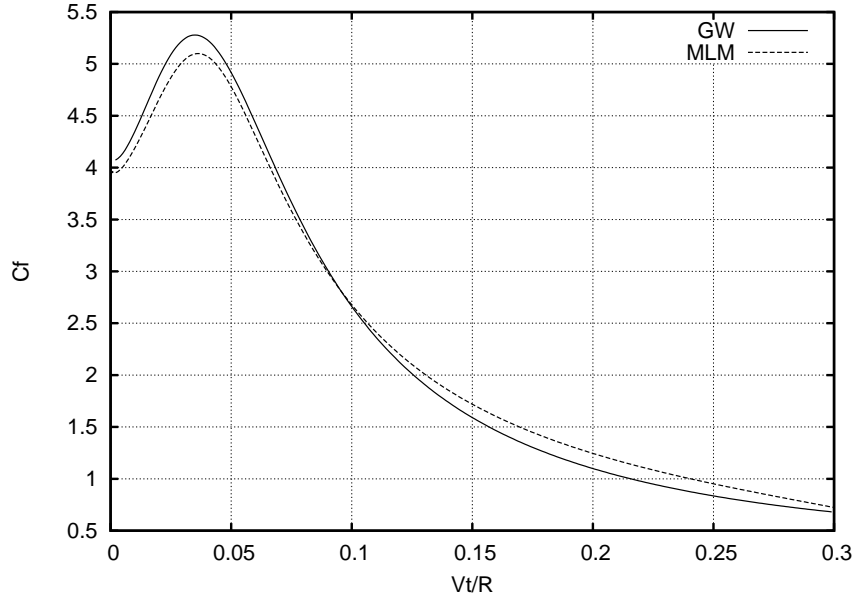


FIG. 3.22 – History of the hydrodynamic force acting on the non circular cylinder. Results by the present model (GW) are compared to the result of Modified Logvinovich Method (MLM)

Bow section

To complete our study on symmetric impact, the bow section defined by [Zhao *et al.*, 1996] is considered. It is plotted in figure 3.23.

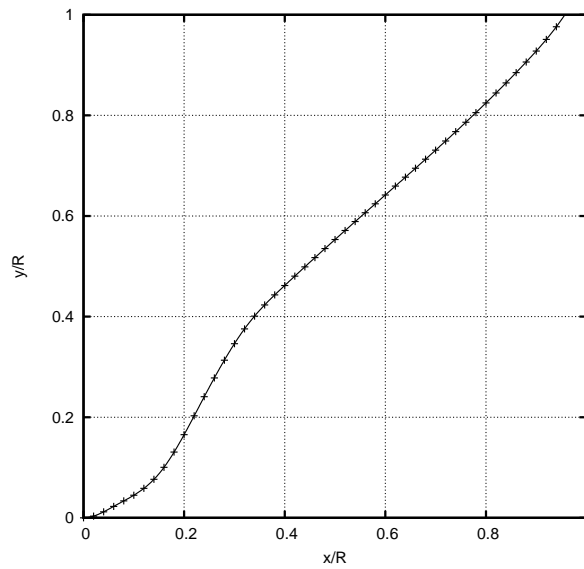


FIG. 3.23 – Geometric representation of the bow section

Figure 3.24 shows the time variation of the wetting correction for both present method and MLM.

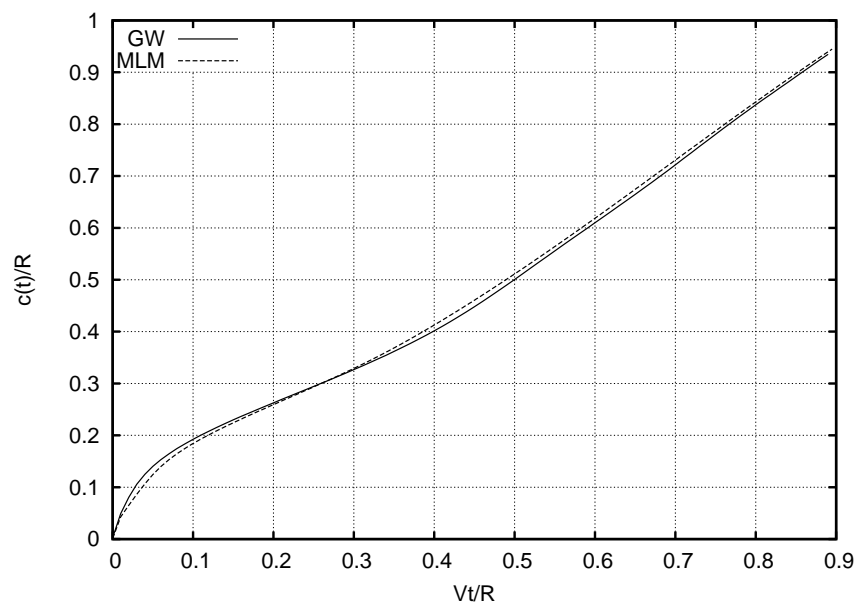


FIG. 3.24 – History of wetting correction predicted by the present model (GW) and by MLM for a bow section

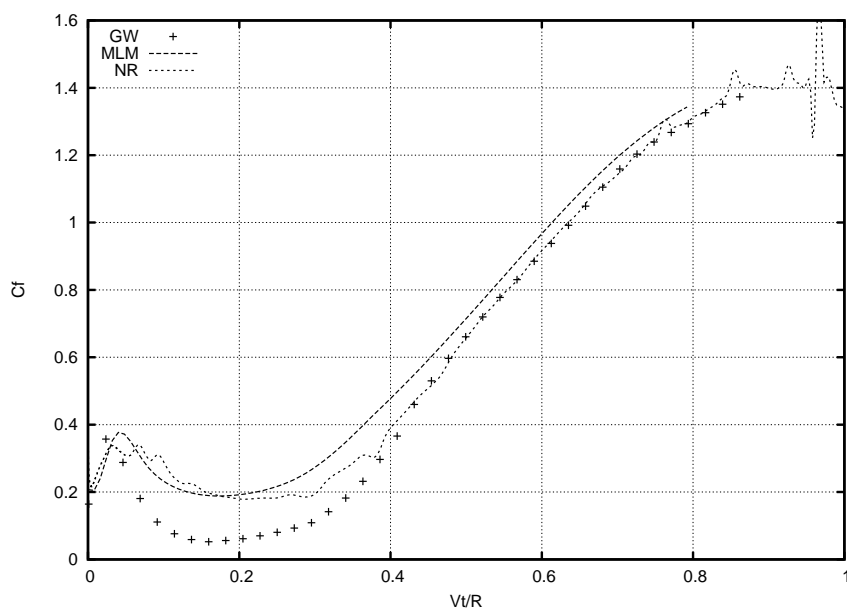


FIG. 3.25 – Hydrodynamic force acting on a bow section. The results provided by the present model (GW) are compared to numerical results (NR) as well as MLM results

For intermediate times, an error of a factor two on the force is obtained. It is qualified by the fact that the higher the loads, the better the accuracy. As a consequence, the error on dimensionning loads is about 1 or 2 % only. The history of $Cf = F/(\rho V^2 R)$ is plotted in figure 3.25 where R denotes the half length of the section. Experimental data by [Xu, 1998] (Exp.) are compared to MLM and to the present model as well.

Asymmetric section of a smooth body

Given the shape defined by

$$y = \begin{cases} b_1 x^3, & x < 0, \\ b_2 x^2, & x > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

We set b_1 to 0.1 and b_2 to 0.15. The resulting shape is plotted in figure 3.26.

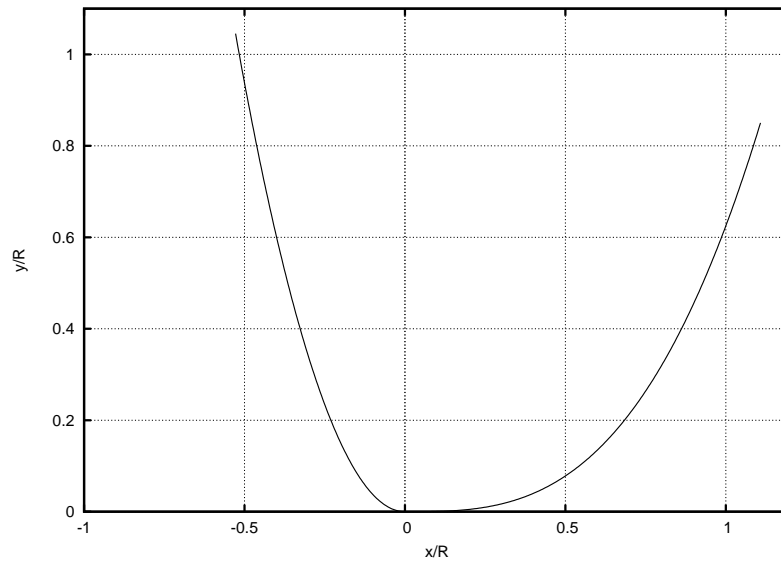


FIG. 3.26 – Geometric representation of the smooth section of a asymmetric paraboloid

The distribution of pressure acting on both sides of the section defined by (3.58) is plotted in figure 3.27 at six different instants. The pressure acting on the left side, where the deadrise angle is very large, rapidly vanishes. Hence, even if only a short duration can be modelled, it is enough to compute the maximum of the loads. It can be noted that no separation occurs at the apex, where the section remains smooth, unlike for an asymmetric wedge.

In the present calculation, the heel angle of the section is fixed to zero. In practice, the section is submitted to a moment, resulting of the discrepancy between the strains on right and left sides. Hence, if the section is let free to rotate around its apex, it will capsize rapidly.

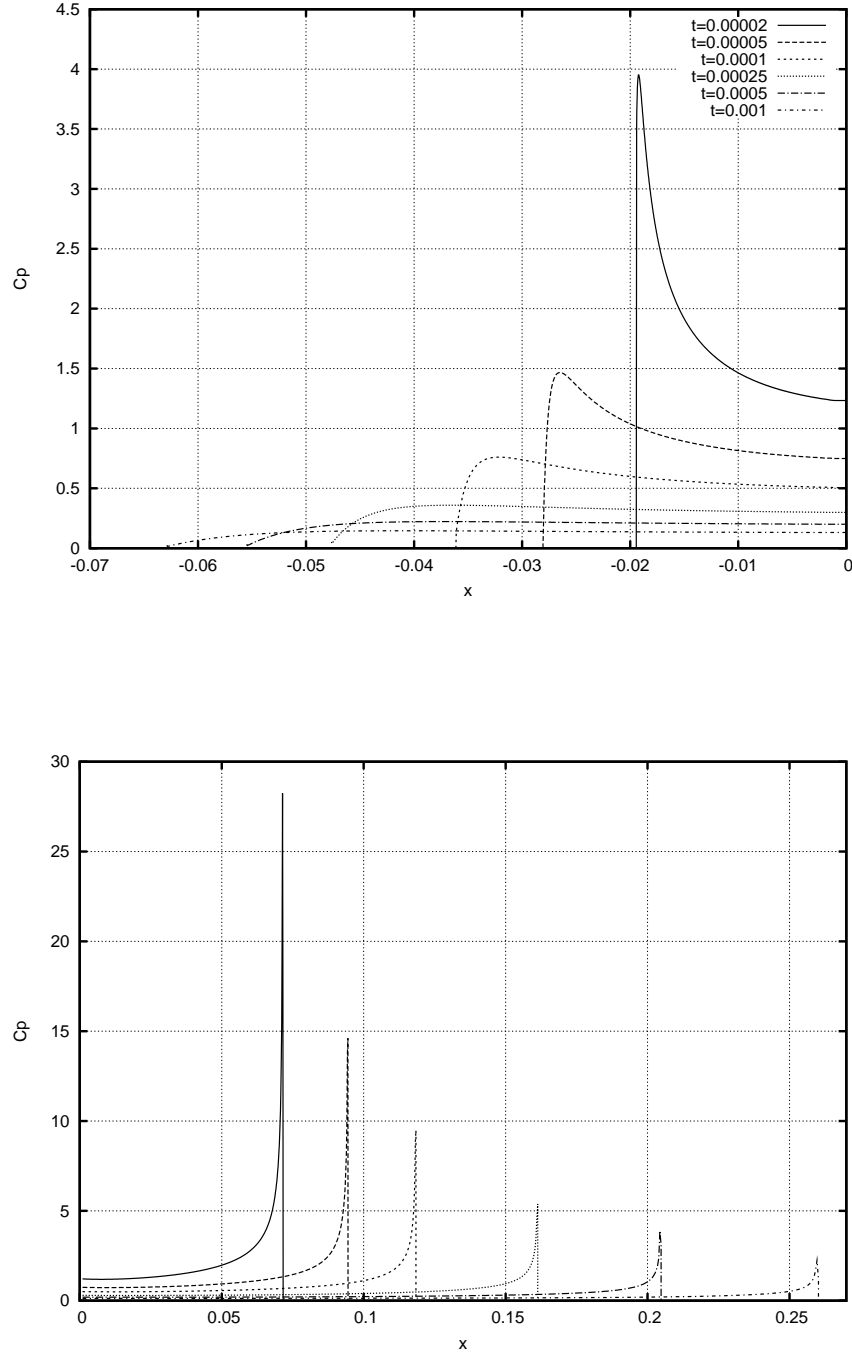


FIG. 3.27 – Pressure distribution at different instants acting onto the left side (top) and right side (bottom) of the smooth section of a asymmetric paraboloid

3.5.4 Symmetric wedge in free fall

Concerning the problem of a symmetric wedge impacting a free surface in free fall, experimental data by [Wu *et al.*, 2004] are available. In their study, Wu *et al.* considered eight configurations, listed in table 3.2. For 2 values of the deadrise angle (20° and 45°), they made the three parameters f , M and V_0 vary, where f represents the frictional force in the experimental

setup and V_0 is the prescribed velocity at the first instant of the impact. They also take into account the acceleration of the gravity $g = 9.81m.s^{-2}$.

TAB. 3.2 – Symmetric wedge in free fall : parameters of the simulations

$\beta = 45^\circ$				$\beta = 20^\circ$			
	$f (N)$	$M (kg)$	$V_0 (m/s)$		$f (N)$	$M (kg)$	$V_0 (m/s)$
a	21.75	13.522	1.57974	a	25.46	13.492	1.54405
b	24.39	13.522	0.95623	b	25.85	12.952	0.86165
c	25.31	30.188	1.69673	c	35.53	29.618	1.54405
d	13.82	30.188	1.03634	d	20.76	29.618	0.85462

We compare the results obtained with the present method to the numerical results (BEM) of Wu *et al.*, validated by comparison to experimental data in [Wu *et al.*, 2004], for the eight configurations . In order to fit better with the experimental results of Wu *et al.* in terms of kinematic, the two contributions g and $\frac{f}{M}$ are added at the right hand side of Newton's law. This procedure is artificial since in practice, frictional force, as well as gravity are neglected in the hydrodynamic model. Figures 3.28 and 3.29 give results in terms of acceleration $a(t) = dV/dt$ of wedges with deadrise angle 45° and 20° and for different values of V_0 , M and f , reported in table 3.2. For $\beta = 45^\circ$, the discrepancy between present method and BEM solution by [Wu *et al.*, 2004] is less than 8%. If $\beta = 20^\circ$, the discrepancy is more important than for $\beta = 45^\circ$ (20% in the worst case).

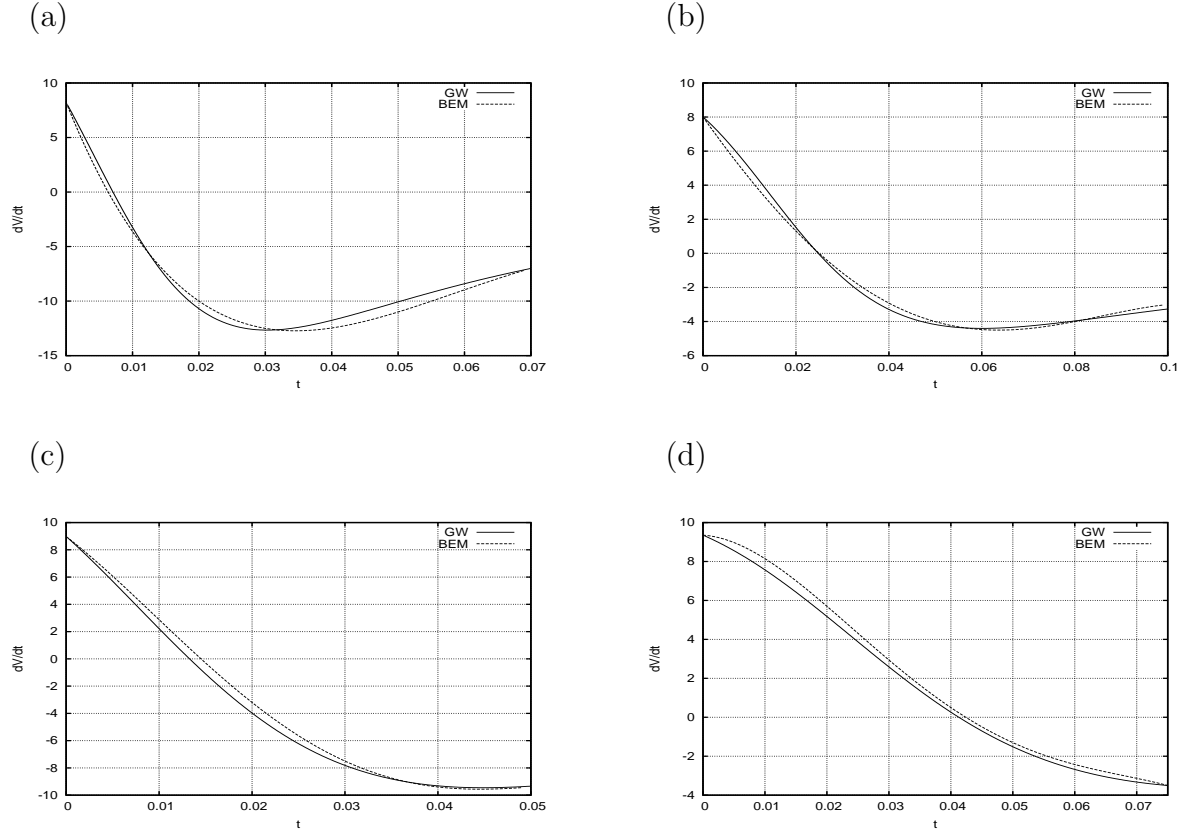
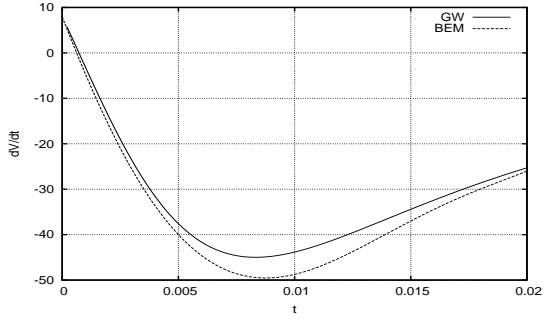
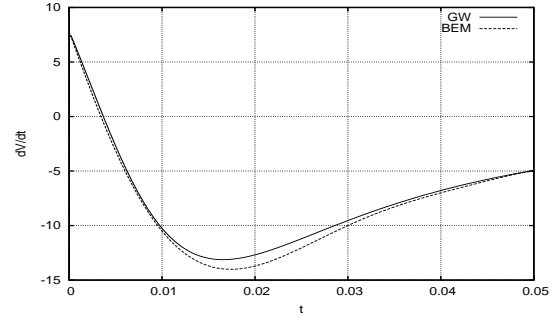


FIG. 3.28 – Deceleration of a symmetric wedge in free fall with $\beta = 45^\circ$. Parameters of simulation are given in table 3.2 for each cases a,b,c,d

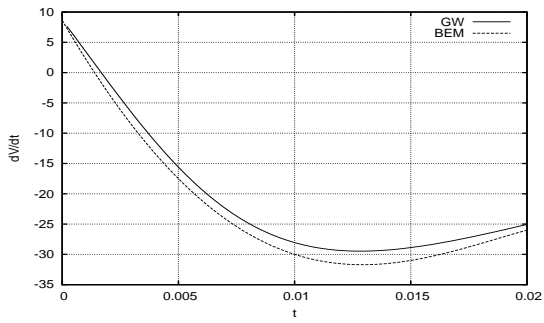
(a)



(b)



(c)



(d)

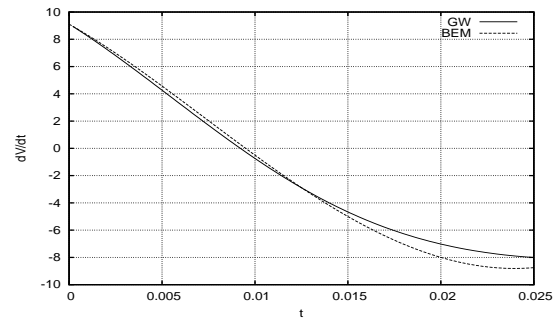


FIG. 3.29 – Deceleration of a symmetric wedge in free fall with $\beta = 20^\circ$.

3.5.5 Asymmetric wedge in free fall

The same problem in asymmetric case is now considered : a wedge with inner angle $\alpha = 70^\circ$ and heel angle $\delta = 5^\circ$ is falling freely from a drop height noted h . Figure 3.30 shows the deceleration and the velocity of the wedge during the impact for different drop heights and masses, listed in table 3.2.

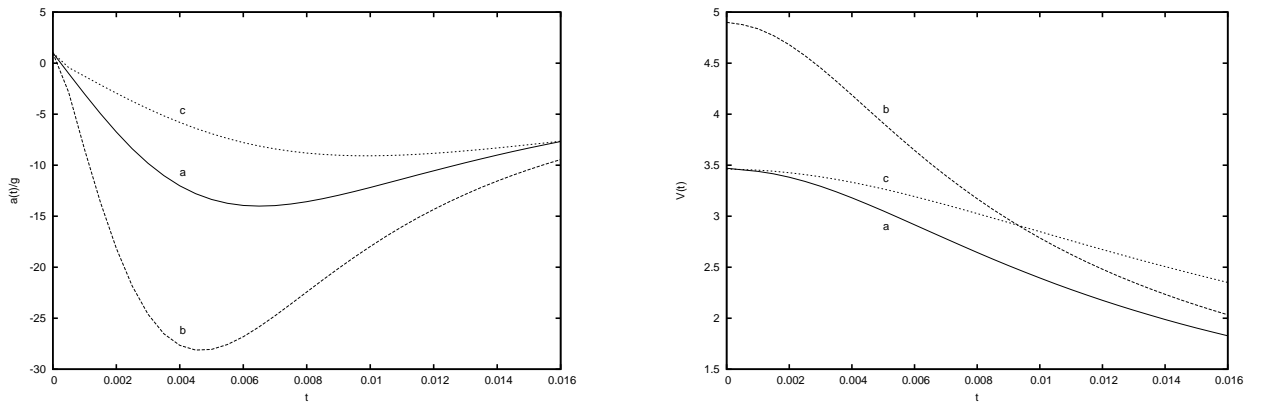


FIG. 3.30 – Deceleration (left) and velocity (right) during water entry in free fall of an asymmetric wedge with inner angle equal to 70° and heel angle equal to 5° in the three configurations a, b and c

Predictions of maximal deceleration are reported in table 3.3 and the results are compared to MLM [Korobkin, 2004], Linearized Wagner Model (LWM) and experimental results by [Xu, 1998]. The relative error is computed with regard to the experimental data for each models.

TAB. 3.3 – Asymmetric wedge in free fall : maximal deceleration for three configurations denoted a,b,c listed in table 3.2

M (kg)	h (m)	GW	LWM	MLM	Exp.	err. (GW)	err. (LWM)	err. (MLM)
124	0.61	14.29	16.1	13.44	13.0	9.92	23.85	3.38
124	1.22	28.74	32.18	26.88	27.0	6.44	19.19	0.004
293	0.61	9.27	10.48	8.75	8.0	15.88	31	0.09

In the present model the error is halved with regard to the linearized Wagner model. The efficiency of MLM to compute hydrodynamic force is illustrated once more. In fact, the error is the smallest for MLM. However, the domain of validity of the generalized approach is wider and results are presented for small deadrise angle only.

3.5.6 Capsizing wedge

In this section, we consider a wedge that is freely rotating around its apex. No horizontal motion is allowed. It hence have two degrees of freedom (vertical motion and rotation). Its inner angle is set to $\alpha = 60^\circ$ and its heel angle is set initially set at $\delta = 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ$ and 20° . Figure 3.31 shows the time history of both velocity and heel angle. The simulation stops when the heel angle is equal to zero. The larger the initial heel angle, the faster it reaches the zero value. The influence of the initial heel angle on the vertical velocity is less important. Figure 3.32 shows the history of the wetting correction on the left and right side of the section respectively.

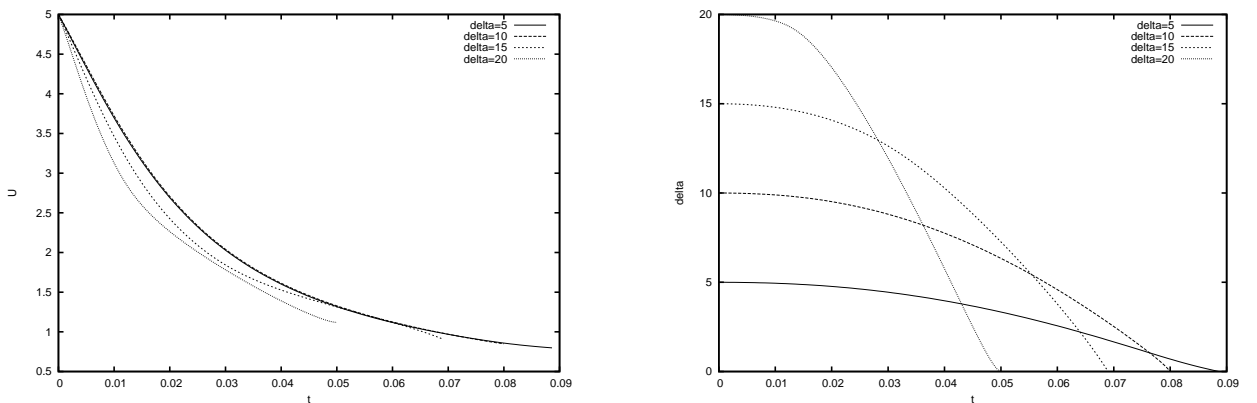


FIG. 3.31 – Evolution in time of the free fall velocity (left) and heel angle δ (right)

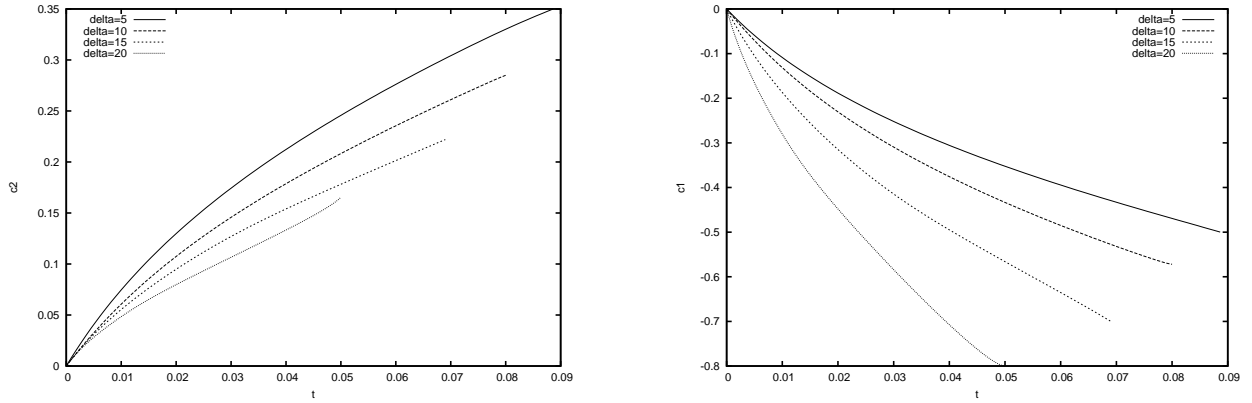


FIG. 3.32 – Evolution in time of the wetting correction c_1 (left) and c_2 (right) on both sides of the impacting section

3.6 Conclusions

A quasi-analytical way to solve the generalized Wagner model, originally developed by [Zhao *et al.*, 1996] is proposed. This method allows us to consider arbitrary sections, symmetric or not. This is made possible by a systematic transformation of the physical problem, without linearization of the wetted surface. The exact position of the wetted surface is hence taken into account and it is transformed by conformal mapping into a flat plate. The Riemann-Hilbert theory is then used to solve the resulting problem. Conformal mappings have already been used by [Mei *et al.*, 1999] to solve this problem for symmetric shapes. One of the originalities of the present work is the extension of this kind of approach to asymmetric sections.

The present method of solution has been validated for cases of constant entry velocity of wedges, symmetric or not. For constant wedge-entry velocity, similarity solutions [Dobrovol'skaya, 1969], [Semenov and Iafrati, 2006] are available. They are considered as reference. More complicated shapes and variable velocity are considered as well.

As a drawback, the present model does not take into account the fully nonlinear problem like BEM does. However, it requires less linearization than a classical linearized Wagner model. In particular exact geometry of the wetted surface is taken into account and the analysis is not limited by the deadrise angle.

The present method shows several advantages in comparison to numerical method such as BEM.

- Linear system is of smaller size than in a BEM approach, hence only few CPU time is necessary to obtain an instantaneous pressure distribution.
- Due to the conformal mapping itself, the discretization points are naturally concentrated in the area where the curvature of the section is important.
- The analytic definition of the transformation allows to define exactly the singularities. In [Malleron *et al.*, 2007], it is argued that GWM should be considered as a semi-empirical model similar to MLM but more developed. Predictions of loads by GWM are expected to be always better than MLM ones. To some extent this is true in terms of pressure

distributions. However, it came once again a surprise that MLM is at least comparable with GWM in terms of the vertical hydrodynamic force acting on entering sections. This result is not logical. Mathematically GWM is superior with regards to MLM. This contradiction requires a deeper analysis in a future.

Chapitre 4

Some particular aspects of the Generalized Wagner model

In the previous chapter, it has been shown that the generalized Wagner is suitable to predict the water entry behaviour of various shapes into water. Attention is mainly paid on global and local loads as well as kinematics. In the present chapter, we focus on some particular and physical aspects of the hydrodynamic impact phenomenon. In particular, possible occurrence of non-viscous flow separation is discussed and the model is shown to verify a mass conservation law. The question of the energy is also discussed in spite of the fact that energy is not conserved in the present model. A way to evaluate the amount of energy lost during the simulation is proposed. This point is of interest since it provides a criterion, to tell if at a given time, the energy conservation law is respected or not. Of course if it is the case, results provided by the model must be considered with caution. Finally, impact of section showing a sharp edge at the initial contact point is investigated. This case must be considered with care, since the expansion velocity of the wetted surface tends to zero at the initial contact point.

4.1 Non viscous flow separation

When a shine or a brusque change of geometry is present along the contour of the impacting section, the fluid flow separates from the body contour at this point. It means that the fluid particules do not follow the contour of the body anylonger. They preferentially follow a jet line. This kind of separation is called non viscous flow separation since it is not due to effects of the viscosity (see [Sun, 2007]). Such a separation can also occurs on section which does not present any radical change of geometry. It is the case for a circular cylinder for example. Experiments performed by [Greenhow and Lin, 1983] show the occurrence of such a phenomenon for a circular cylinder in free fall. In that case, the difficulty is to determine the point where the flow separates. During the initial stage of the impact, fluid particles at the interface follow the contour of the cylinder. Centripetal acceleration of these fluid particles is provided by the normal component of pressure gradient $\frac{\partial p}{\partial n}$. This gradient has significant value in the neighborhood of the contact point, where the pressure successively takes large value and very small one (smaller than the atmospheric pressure), as shown in figure 3.20 (right). When this neighborhood is of significant size compared to the wetted length, air can enter the low pressure area. As a consequence, there is no contact anylonger between the low pressure wetted surface and the fluid *i.e.* the flow separates from the impacting body.

To take into account non viscous flow separation, a precise modelling of the jet is required. In the present model, the free surface position is linearized and recomputed *a posteriori*. Some

information can however be obtained in terms of instant of separation. [Sun, 2007], considers that separation occurs when the discrepancy between the position of the point where the pressure is equal to zero and the contact point begins to increase significantly. We hence suppose that the possible occurrence of the flow separation is correlated with the importance of the discrepancy between the contact point and the point where the pressure is equal to zero.

4.1.1 Influence of the entry velocity

First, the entry velocity is supposed to remains constant during the whole penetration. It is successively set to 0.75 ; 1 ; 1.2 ; 1.3 ; 1.5 ; 2 ; 3 and 4 $m.s^{-1}$. The history of the contact point position, compared to those of the point where the pressure is equal to zero is plotted in figure 4.1.

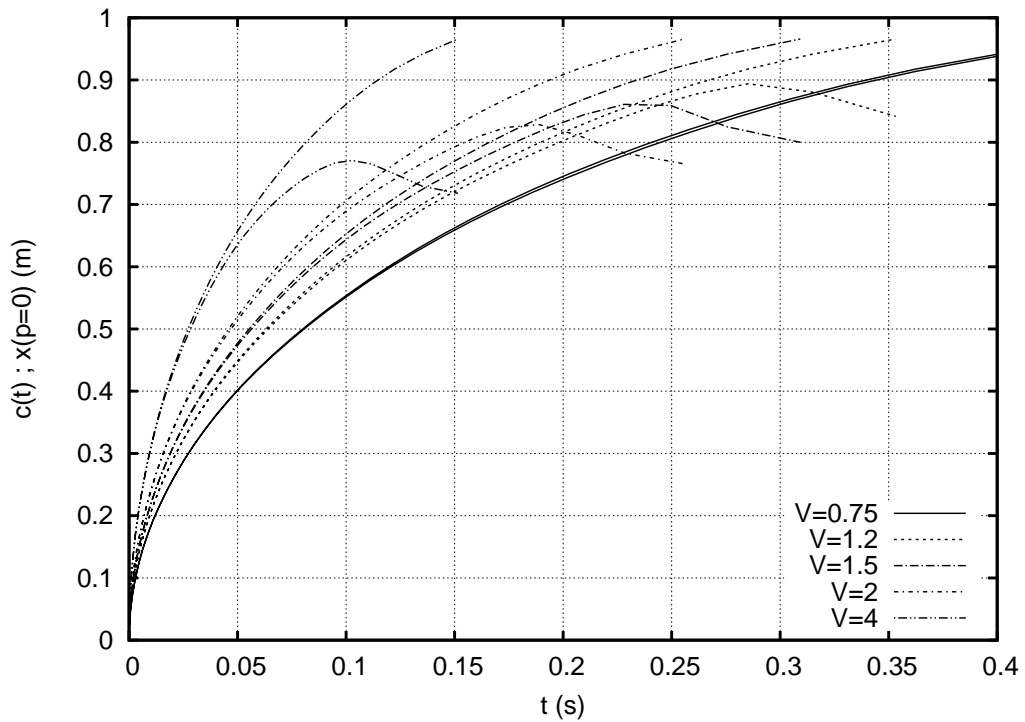


FIG. 4.1 – Time evolution of both the contact point and the point where the pressure is equal to zero during the circular cylinder impact. The entry velocity is assumed to be constant and it is successively set to 0.75 ; 1.2 ; 1.5 ; 2 and 4 $m.s^{-1}$

The discrepancy between these two positions is plotted in figure 4.2.

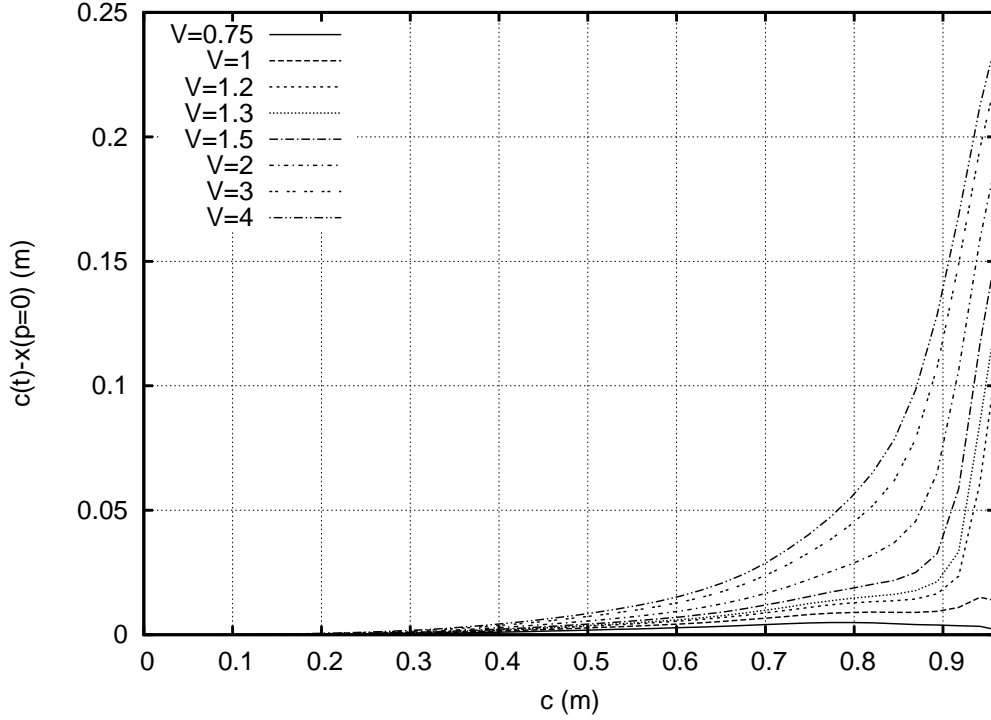


FIG. 4.2 – Time evolution of the discrepancy between the point where the pressure is equal to zero and the contact point during the circular cylinder impact. The entry velocity is assumed to be constant and it is successively set to 0.75 ; 1 ; 1.2 ; 1.3 ; 1.5 ; 2 ; 3 and 4 $m.s^{-1}$

It shows that the velocity plays an important role in flow separation phenomenon. In fact, it clearly appears that there is some values of the velocity for which the discrepancy between the two points of interest remains small. For $V < 1$, we have $c(t) - x(p = 0) < 0.02R$, whereas for $V > 1$, this discrepancy can take significant values (up to $0.25 R$ at the end of the penetration for $V=4$). In that case, the model is of course not relevant till the end of the penetration, since it is evident that separation occurs in that case.

4.1.2 Influence of the aspect ratio

In this part, the entry velocity is set to $1 m.s^{-1}$ and the aspect ratio of the section is varying. It is successively set to 0.55 ; 0.75 ; 1 ; 2 and 4. Corresponding shapes are represented in figure 4.3. The history of the contact point position, compared to those of the point where the pressure is equal to zero is plotted in figure 4.4. The discrepancy between these two positions is plotted in figure 4.5. It shows that the role played by aspect ratio is less important than those played by entry velocity. In fact, less significant variations on $c(t) - x(p = 0)$ are observed with the aspect ratio. For aspect ratios smaller than 1, the model is not relevant for $c(t) > 0.75R$. The separation has already occurred in that case. Hence, results for larger times must be considered with caution.

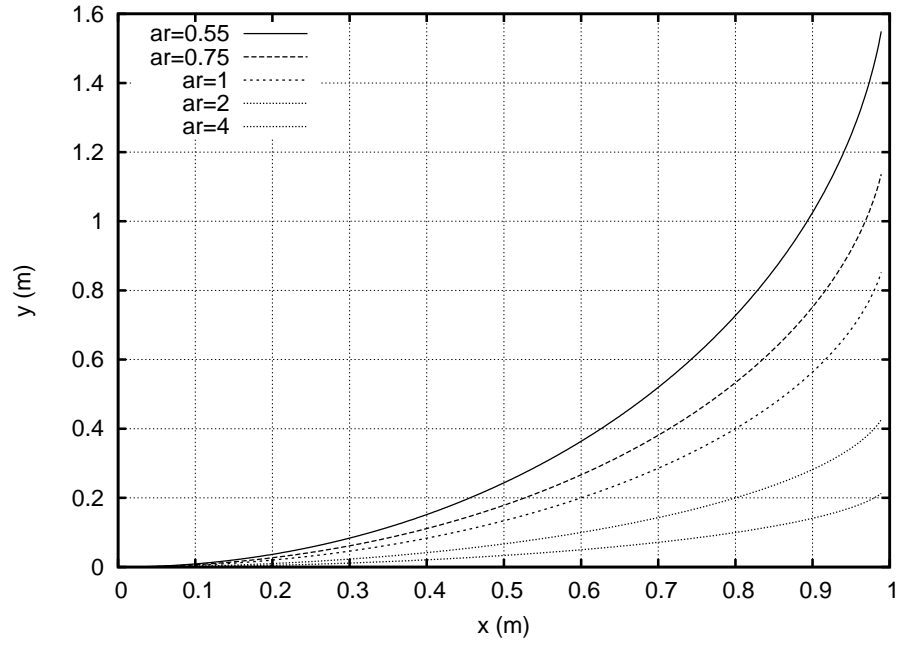


FIG. 4.3 – Shape of a circular cylinder with aspect ratio equal to 0.55; 0.75; 1; 2 and 4

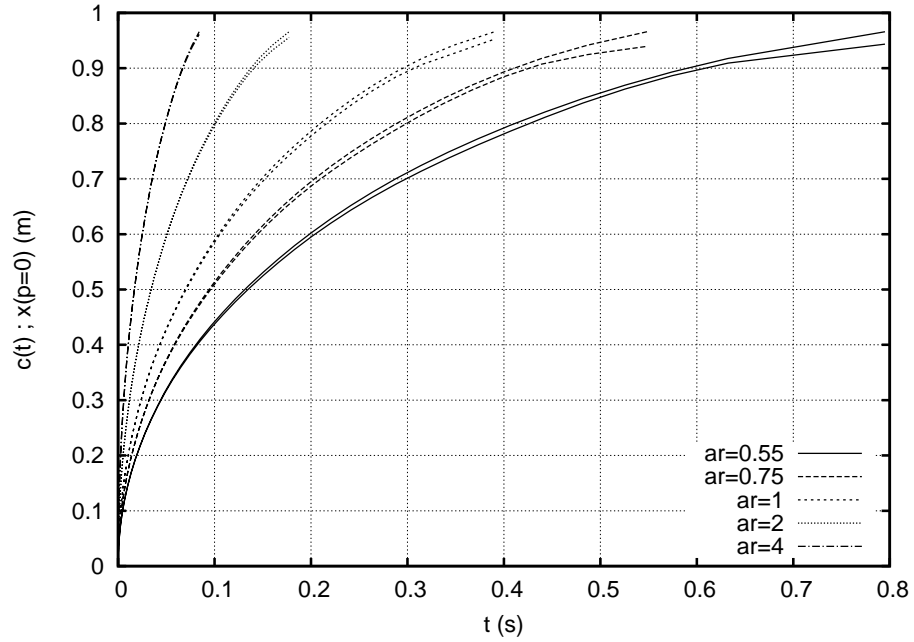


FIG. 4.4 – Time evolution of both the contact point and the point where the pressure is equal to zero during the circular cylinder impact. The aspect ratio is successively set to 0.55; 0.75; 1; 2 and 4

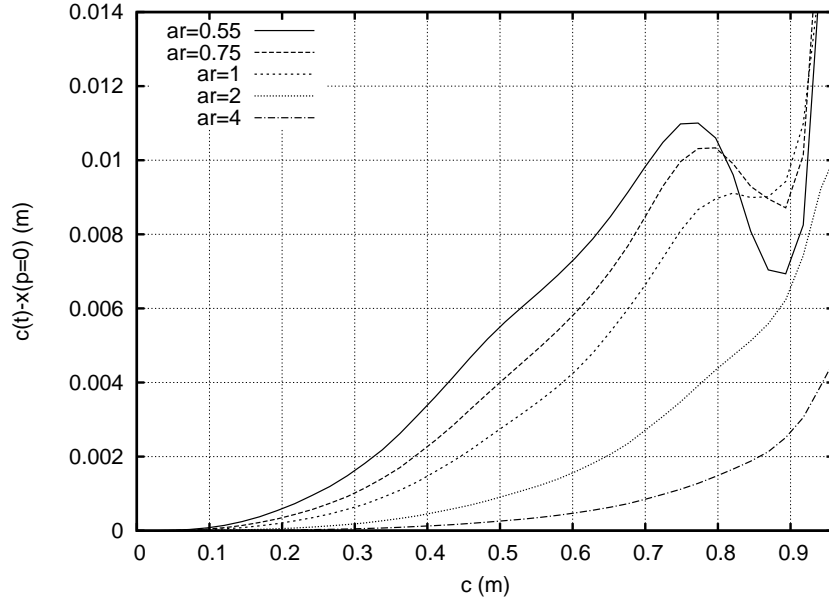


FIG. 4.5 – Time evolution of the discrepancy between $c(t)$ and $x(p = 0)$. Aspect ratio of the impacting circular cylinder is successively set to 0.55 ; 0.75 ; 1 ; 2 and 4

4.1.3 Influence of a variable entry velocity

In this part, circular cylinder impact are considered at both constant and variable velocity.

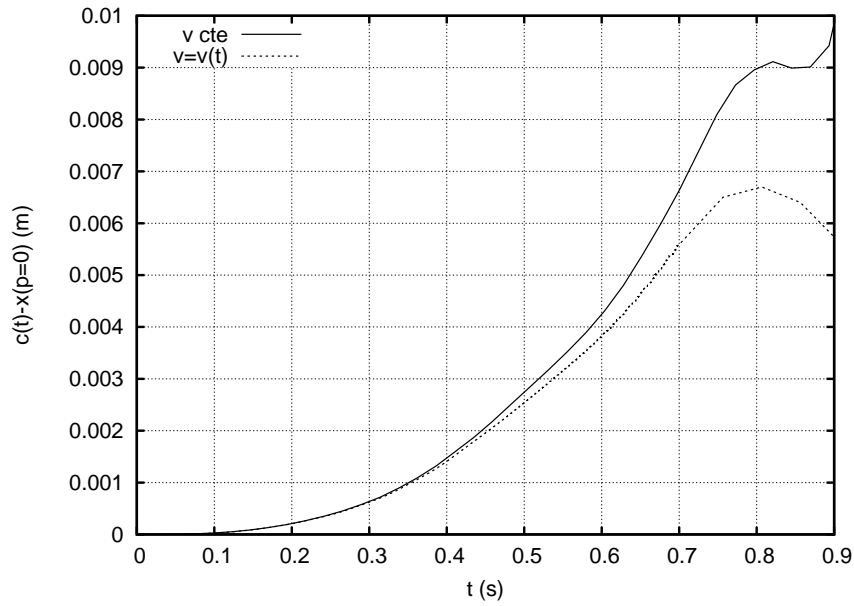


FIG. 4.6 – Influence of the variable velocity on possible separation $V(t = 0) = 1 \text{ m.s}^{-1}$

In figure 4.6, the discrepancy between $c(t)$ and $x(p = 0)$ is computed for a constant entry velocity equal to 1 m.s^{-1} and for a variable velocity initially equal to 1 m.s^{-1} . The same comparison is performed in figure 4.7 for a velocity equal to 4 m.s^{-1} . The behaviour is not exactly the same in the two cases. On one hand, it can be noticed that the larger the velocity, the larger the discrepancy. Since we do not properly take into account the separation in the present computations, this discrepancy can only be considered as an indication of possible occurrence of flow separation. This results hence tends to show that a high velocity of impact facilitate flow separation

On the other hand, in the variable velocity case, the velocity becomes very small compared to the initial one after a certain time. It explains why the amplitude of the phenomenon is smaller in the variable case than in the constant one.

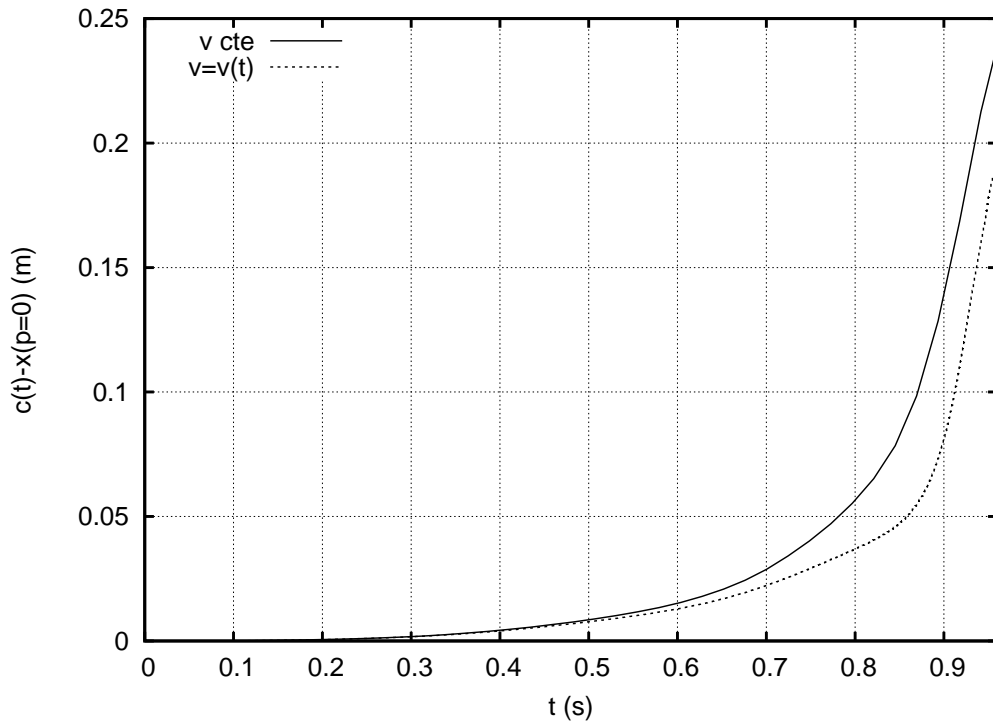


FIG. 4.7 – Influence of the variable velocity on possible separation. Entry velocity is set to a constant value $V = 4 \text{ m.s}^{-1}$ during whole penetration (solid lines) and to variable values (dashed lines). In the latter case, entry velocity is initially set to 4 m.s^{-1}

4.1.4 How to modelize flow separation ?

A local solution for the flow in the jet has been developped by [Sun, 2007]. A cylindrical coordinates system with its origin at the separation point is used, as shown in figure 4.8.

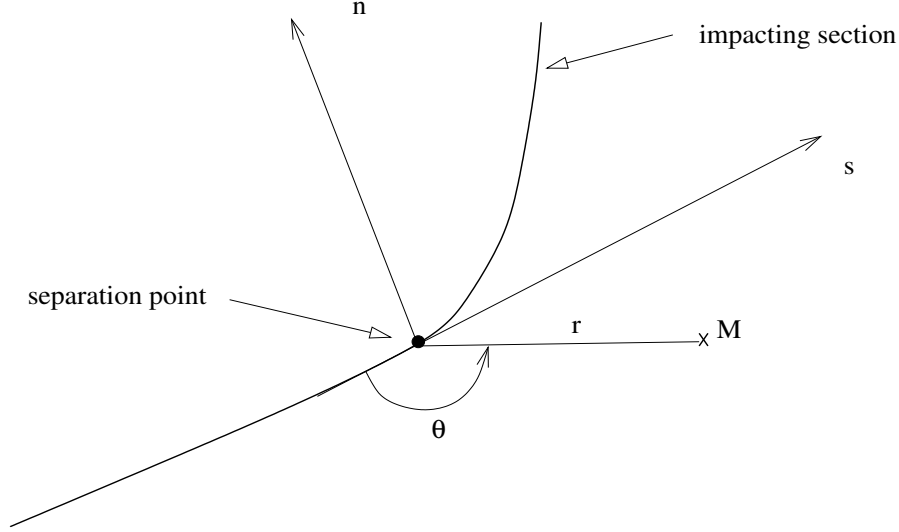


FIG. 4.8 – Local coordinate system centered onto the separation point

In this approach, she reduces the general potential solution :

$$\phi(r, \theta, t) = \text{Re} \int_0^\infty a_k(t) r^k e^{ik\theta} dk \quad (4.1)$$

to the discrete sum

$$\phi(r, \theta, t) = \sum_k A_k(t) r^k \cos k\theta. \quad (4.2)$$

Then, she shows that the dominant terms in this series are

$$\phi(r, \theta, t) \sim A_0 - U_S r \cos \theta + A_{3/2} r^{3/2} \cos 3\theta/2, \quad (4.3)$$

where U_s is the tangential velocity of the flow at the stagnation point. In her works, this solution is then matched to the solution in the external domain obtained by BEM. In the present approach, there is no hope to match the solution obtained by the generalized Wagner model since it requires a linearization of the free surface. Hence, it provides not enough information to be able to realize the matching in a suitable way. The coefficient A_0 , U_S and $A_{3/2}$ can however be identified by matching the local solution (4.3) in the jet to those obtained thanks to the generalized Wagner model, as illustrated in figure 4.11. Results of this matching are shown in figure 4.10. The main information provided by such a model is the sign of the coefficient $A_{3/2}$, that is directly linked to the curvature of the free surface in the jet. In fact,

$$\frac{dn}{ds} = \frac{U_n}{U_s} = \frac{3A_{3/2}\sqrt{r}}{2U_S}. \quad (4.4)$$

In practice, it can be important to predict which one of the two scenarii sketched in figure 4.9 will happen. In fact, the second one ($A_{3/2} > 0$) can yield a secondary impact.

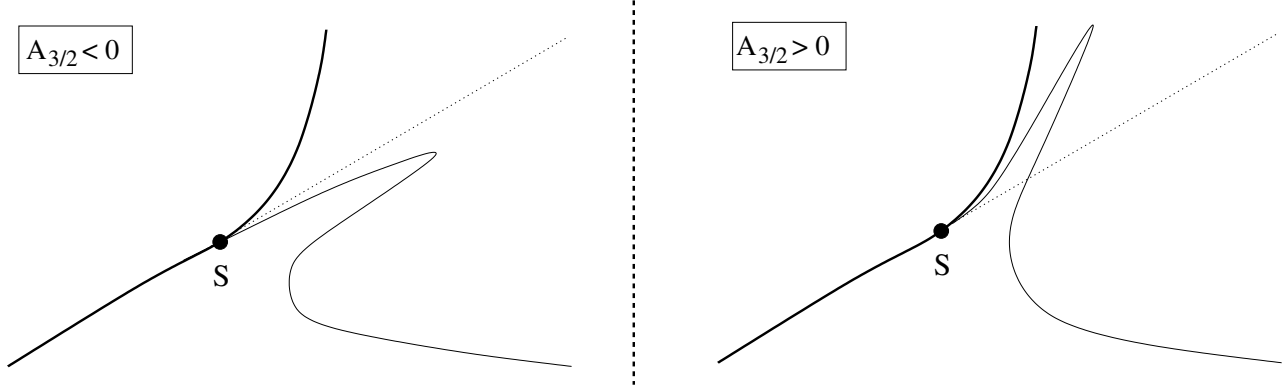


FIG. 4.9 – Two possible scenarii concerning the occurrence of the jet. The curvature of the jet depends on the sign of $A_{3/2}$

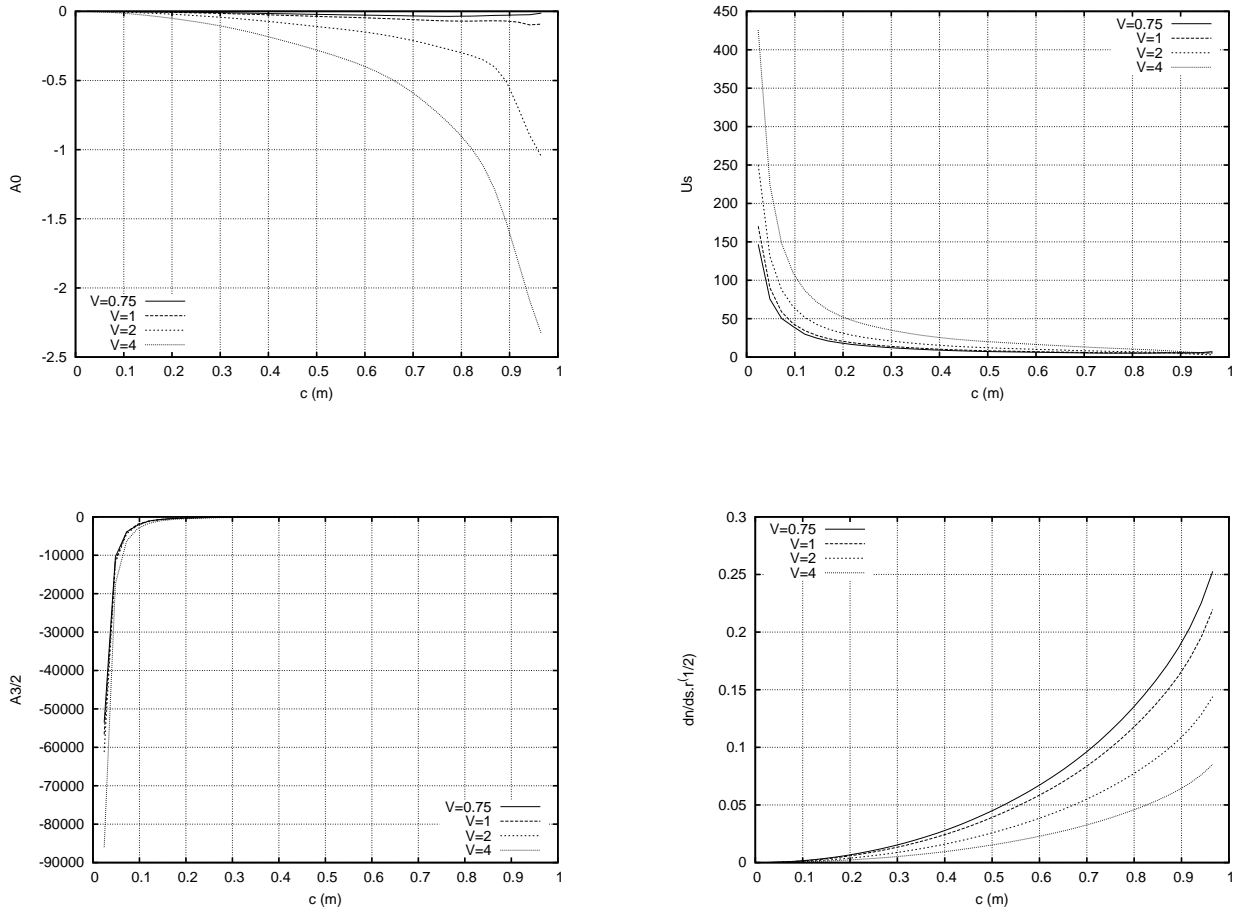


FIG. 4.10 – Identified coefficients A_0 , U_s , $A_{3/2}$ (from left to right and top to bottom) and curvature of the free surface at the jet root during circular cylinder water impact

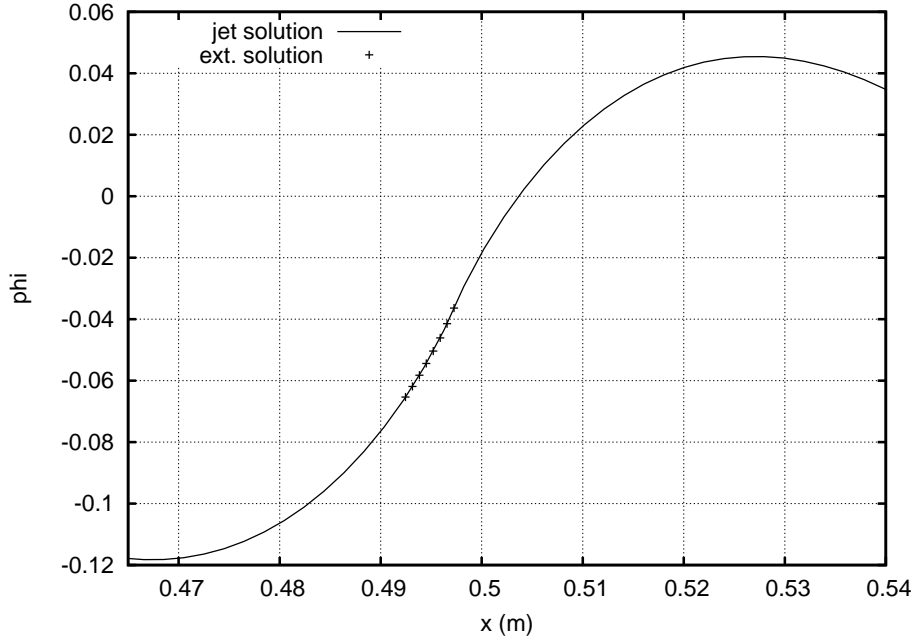


FIG. 4.11 – Matching between the local solution in the jet area and the exterior solution. Solution in terms of velocity potential in the jet is represented by a line. The values in the exterior domain of the jet root, provided by the generalized Wagner model and used to perform the identification, are represented by crosses

4.2 Mass conservation

It is well established that the linearized Wagner model verifies mass conservation law. In the present approach, the linearized free surface is located above the physical one. Hence, the present generalized Wagner model is “artificial” and mass conservation law is not verified *a priori*. However, it can be shown that the mass is conserved if the calculated position of the free surface is used, instead of the straight lines representation.

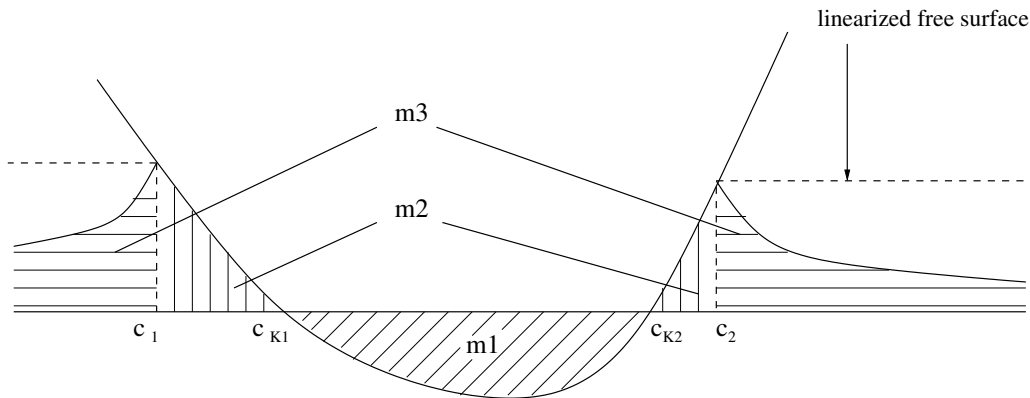


FIG. 4.12 – Definition of instantaneous mass of fluid displaced during the penetration

It can be shown that at time t , the mass m_1 displaced by the body is equal to $m_2 + m_3$, the

mass of water between calculated free surface and its initial position. The problem is sketched in figure 4.12, where c_{K1} , c_{K2} are the contact points in von Karman's approach and c_1 , c_2 are the wetting corrections computed in the present model. The mass conservation can hence be simply written as

$$m_1 = m_2 + m_3, \quad (4.5)$$

with

$$\begin{cases} m_1 = \int_{c_{K1}}^{c_{K2}} (f(x) - H(t)) dx \\ m_2 = \int_{c_1}^{c_{K1}} (f(x) - H(t)) dx + \int_{c_{K2}}^{c_2} (f(x) - H(t)) dx \\ m_3 = \int_{-\infty}^{c_1} \eta(x, t) dx + \int_{c_2}^{\infty} \eta(x, t) dx. \end{cases} \quad (4.6)$$

After time derivation of 4.5, the mass conservation can be rewritten as

$$V(t) (c_1(t) + c_2(t)) = \int_{-\infty}^{c_1(t)} (\eta_{,t}(x, t) - V(t)) dx + \int_{c_2(t)}^{\infty} (\eta_{,t}(x, t) - V(t)) dx. \quad (4.7)$$

The left hand-side in (4.7) is written in terms of A_n by noting that

$$c_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)(-1)^n, \quad \text{and} \quad c_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t). \quad (4.8)$$

The free surface elevation η is measured with regard to the free surface at rest. It is given by

$$\eta(x, t) - H(t) = \int_0^t \Phi_{,y}(x, \tau) d\tau = \int_0^t (\phi_{,y}(x, \tau) - V(\tau)) d\tau. \quad (4.9)$$

In the right hand side, $\eta_{,t} - V = \phi_{,y}$ is substituted with its expression (3.19). It yields

$$\frac{V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\int_{-\infty}^{-1} L_n(u) du + \int_1^{\infty} L_n(u) du \right). \quad (4.10)$$

Detailed calculations are performed in appendix B. Functions $L_n(u)$ are explicated in appendix B as well. The two identities (B.19) and (B.20) prove (4.10). Hence we can assert that mass conservation is verified for each t . The mass conservation is checked numerically as shown in figure 4.13 for both wedge and cylinder impact. The small discrepancy between m_1 and $m_2 + m_3$ is only due to numerical approximation in the integration. In fact, the larger the time, the more important the numbers of points required to properly representate the free surface.

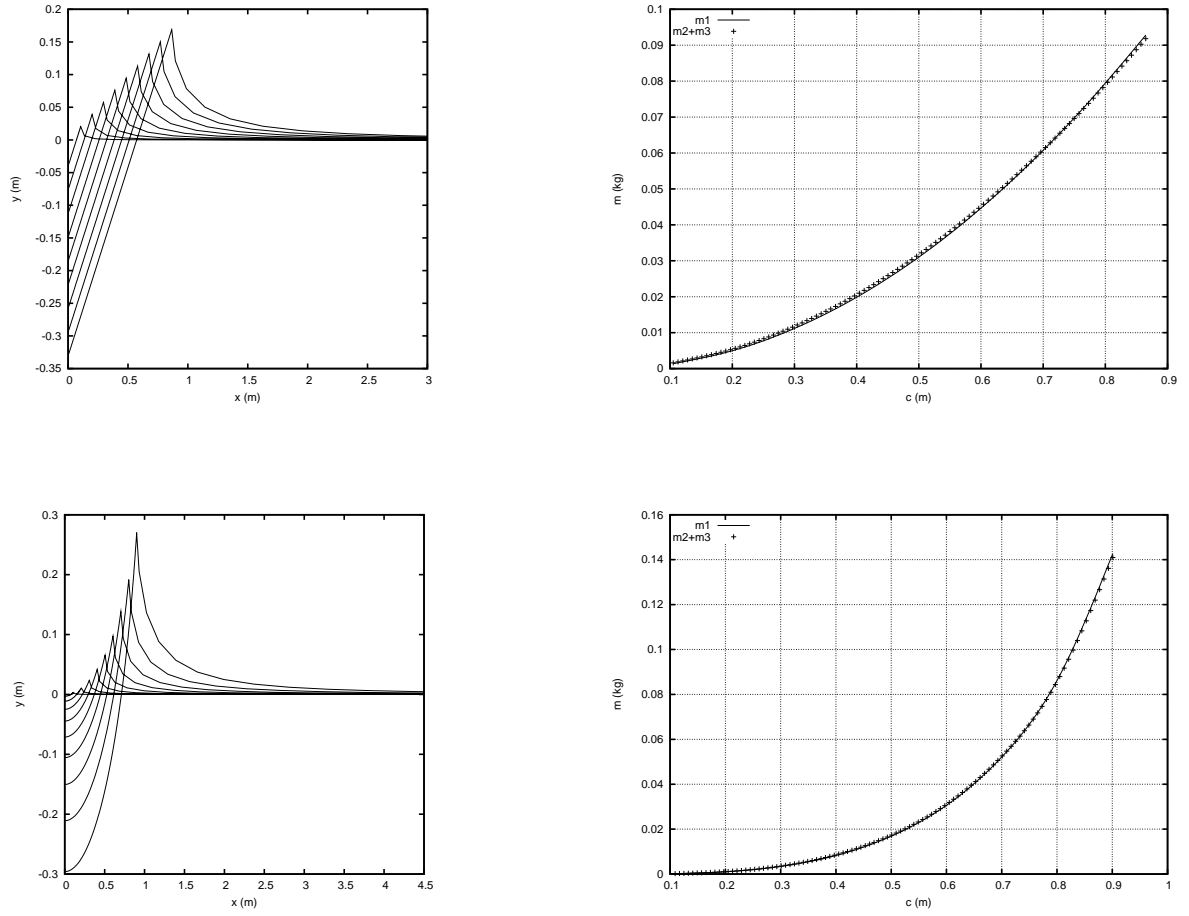


FIG. 4.13 – Computed free surface elevation (left) at 9 instants of the impact. This elevation is used to check mass conservation (right) for a wedge (top) and for a circular cylinder (bottom)

4.3 Analysis of the flow at the spray root

Recently, [Faltinsen, 2002] proposed a Matching Expansion (ME) analysis of the flow at the spray root. The generalized Wagner solution is coupled to a solution at the jet root accounting for the turnover point of the free surface. As a consequence, the model is more realistic. The error on the maximum of pressure, with regard to the similarity solution, is computed for the Linearized Wagner model (Asymp.), the BEM solution, the present generalized model and the generalized model coupled with a solution describing the jet (GW+ME) and plotted in figure 4.14. As a result of the matching, the prediction of the maximum of pressure is greatly improved. The solution using BEM takes into account all nonlinearities and it can hence be considered as the most precise solution and used as reference. However, in the range of deadrise angle considered here, the solution by Faltinsen yields better results than BEM in terms of maximum of pressure computation.

As another consequence of the coupling proposed by [Faltinsen, 2002], the prediction of the hydrodynamic force is also modified. In figure 4.15, results in terms of force by the present model are compared to those of the generalized model, coupled with the solution describing the jet. Asymptotic solutions by Karmann and Wagner, numerical solution using BEM and

similarity solution are shown as well. It shows that in the range $[12^\circ : 30^\circ]$, the slamming parameter $C_f = F / (\frac{1}{2}\rho V^2)$, is underestimated with regard to the other approaches. The matching proposed by [Faltinsen, 2002] allows to compute the characteristics of the jet (flow velocity, thickness). Knowing the flux of fluid mass and the fluid velocity, time derivative of kinetic energy in the jet is hence computed. Results obtained by a linearized Wagner approach (Asymp.), a BEM approach and by coupling the solution of the Generalized Wagner model with a solution in the jet (GW+ME) are shown in figure 4.16. Results by the present model (GW) are also represented. In that case, the time derivative of kinetic energy in the jet E_j is approximated by the difference between the power of hydrodynamic forces and the time derivative of kinetic energy in the fluid below the impacting section.

$$\frac{d}{dt}E_j(t) = F(t).V(t) - \frac{d}{dt}E_k(t), \quad (4.11)$$

where the hydrodynamic force is obtained by integration of the pressure and where the kinetic energy in the fluid below the section is given by [Newman, 1977]

$$E_k(t) = \frac{\rho}{2} \int \int_{WS(t)} \phi \phi_{,n} ds = \rho \frac{\pi}{4} V^2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \frac{1}{2} M_a V^2. \quad (4.12)$$

$\phi_{,n}$ denotes the derivatives of ϕ along the normal to the wetted surface $WS(t)$. The computation of the integral in (4.12) has already be detailed in chapter 3 (section 3.4.3). If V is set as constant, the well known result prescribing that half of the energy is transmitted to the jet is obtained. [Scolan and Korobkin, 2003a] show that in a variable velocity case, more than half of the energy is transmitted to the jet. All these results are compared to the similarity solution, considered as a reference.

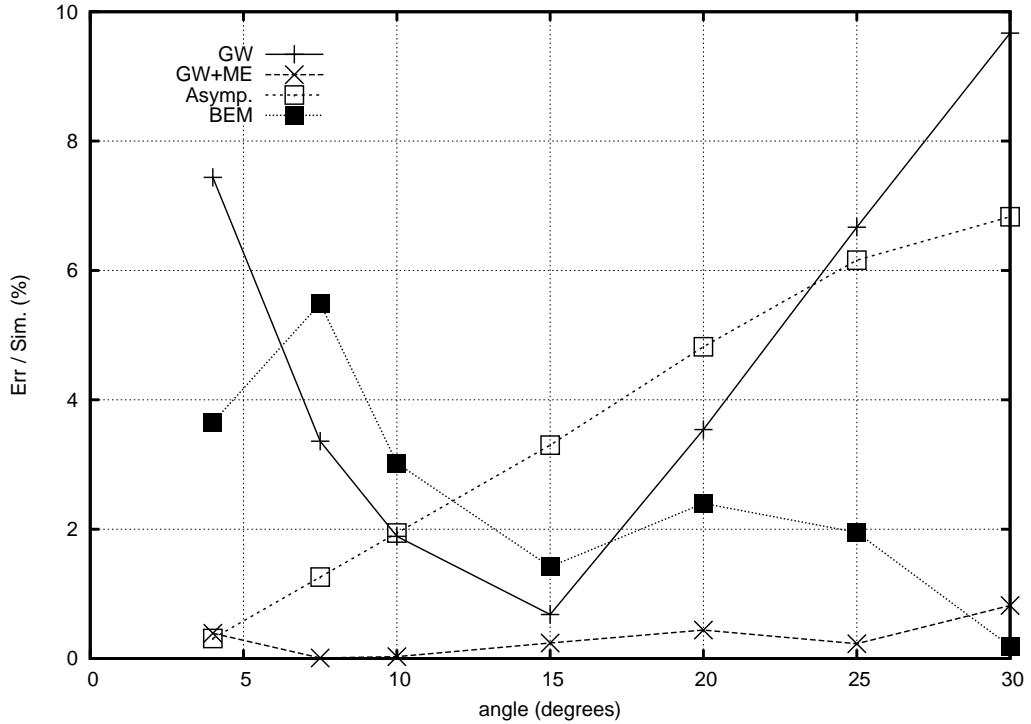


FIG. 4.14 – Error on the maximum of pressure versus deadrise angle in different models.

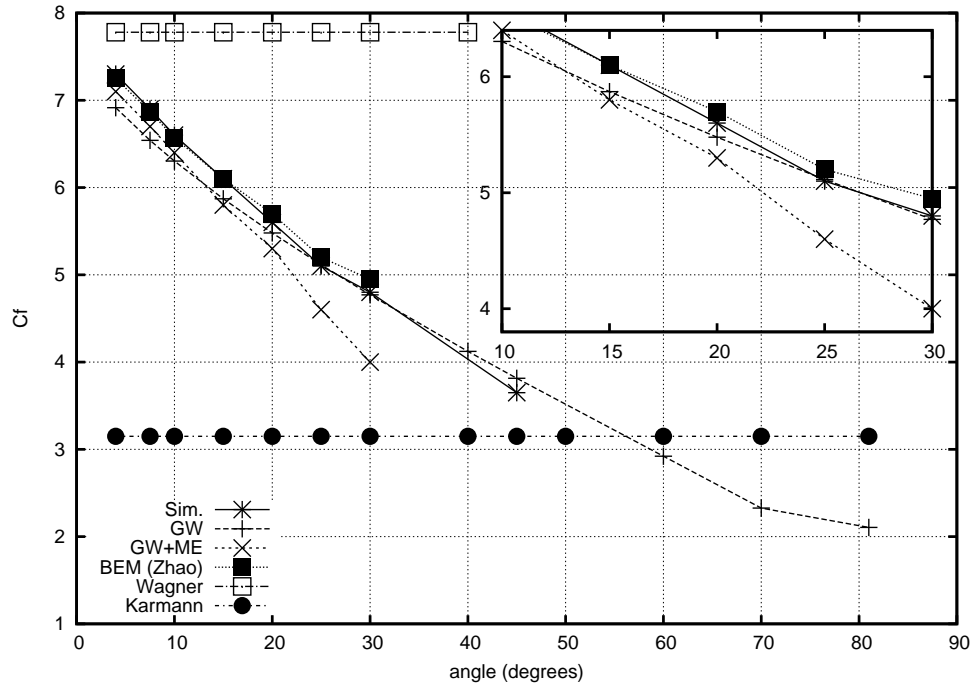


FIG. 4.15 – Slamming parameter versus deadrise angle for symmetric wedge impact

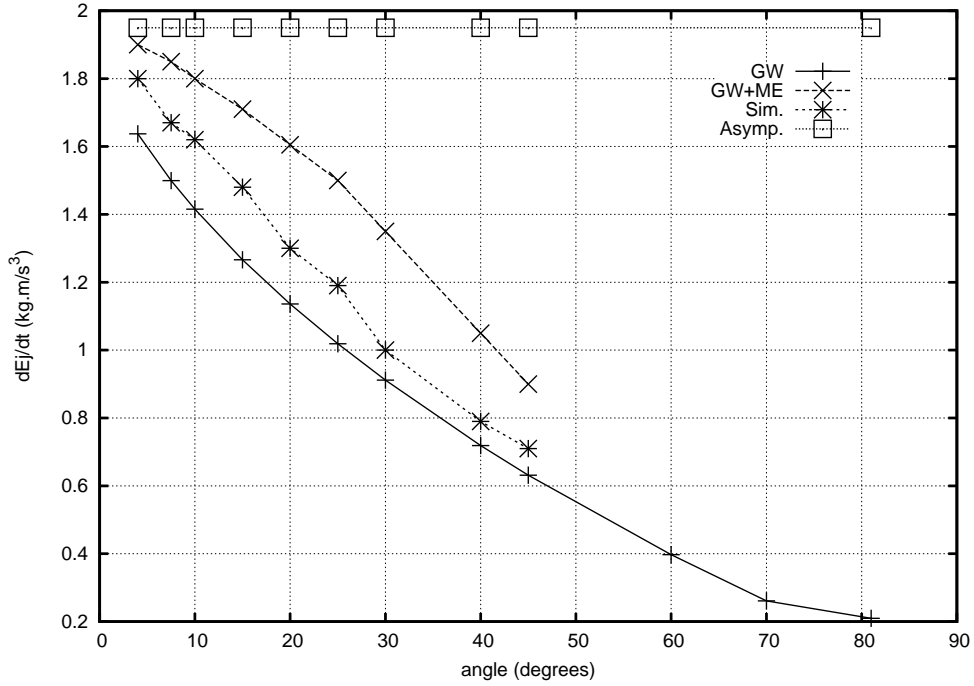


FIG. 4.16 – Power in the jet versus deadrise angle during symmetric wedge impact

4.4 Impact of section with a sharp edge at the apex

In the previous chapter, we focused on sections with deadrise angles at the apex smaller than 81° . When this deadrise angle tends to 90° , the free surface elevation, as well as the expansion velocity of the wetted surface tend to zero, as shown in figure 4.17.

This singular behaviour must be taken into account. In the first section, it is shown how to take it into consideration in the previous developments. Some application are then given. First an impacting section with a tulip shape is considered (see figure 4.18). Then, we consider the impact of a “sinus-like section” (see figure 4.24 (top)).

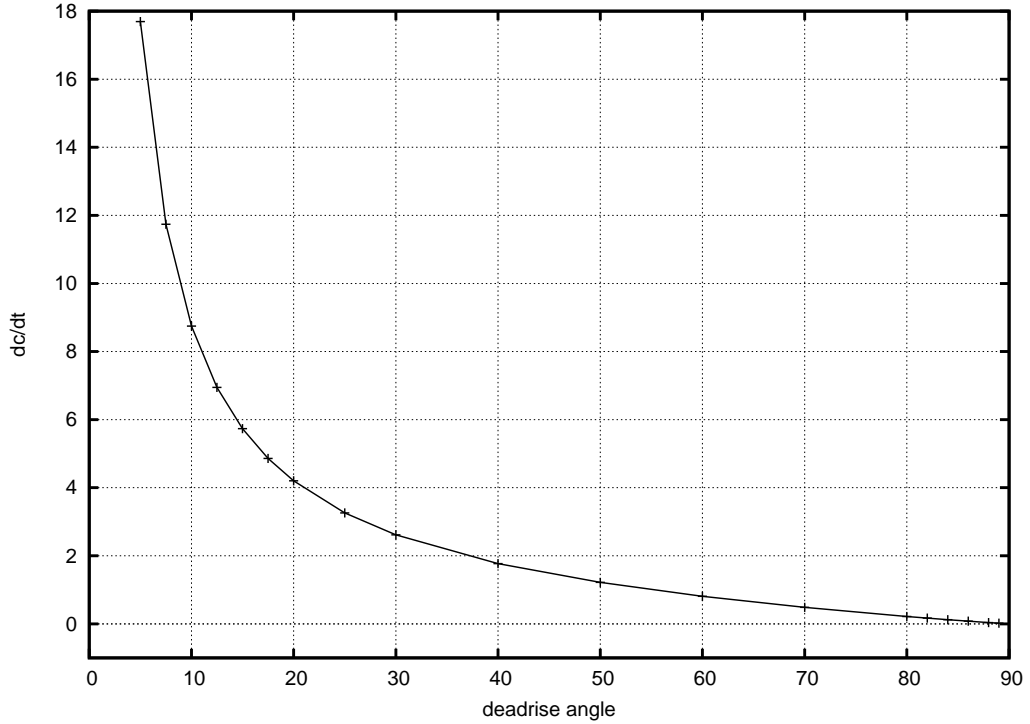


FIG. 4.17 – Evolution of the expansion velocity of the wetted surface during the water entry of a wedge. The angle of this wedge is varying in the range $[5^\circ; 90^\circ]$

4.4.1 Computation of the wetting correction

The computation of the wetting correction is based on the time integration of the free surface kinematic condition. In a symmetric case, we hence have to solve the integral equation

$$f(c(t)) = \int_0^{c(t)} V(\ell)W(c(t), \ell) \frac{d\tau}{d\ell} d\ell. \quad (4.13)$$

The vertical velocity $\phi_{,y}$ of the free surface is given by (3.19). It must be determined at the point $x = c(t)$, $y = \eta(c(t), \tau)$, at a current time of integration τ . At time τ , the shape of the wetted surface is defined by $c(\tau)$. Hence, the integrand of the integral equation (3.20) only depends on $(c(t), c(\tau))$. The singularity of $\phi_{,y}$ at the contact point is perfectly known (see section 2.3).

The penetration depth $H(t)$ is introduced in the integrand of (3.20) and a new function W is defined as

$$W(c(t), c(\tau)) = 1 + \frac{\phi_{,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau)}{V(\tau)}. \quad (4.14)$$

A classical way to solve equation (4.14) is to perform the change of variable $\ell = c(\tau)$ for $\tau \leq t$ in (3.20), by noting that c is monotonically increasing in time. That yields

$$f(c(t)) = \int_{c(t)}^0 V(\ell) W(c(t), \ell) \frac{d\tau}{d\ell} d\ell. \quad (4.15)$$

In that case, by following Mei's method [Mei *et al.*, 1999], $V(\ell) \frac{d\tau}{d\ell}$ is broken down as a series of Chebyshev polynomials such as

$$V(\ell) \frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=0}^N a_j T_j(\ell^*) \quad (4.16)$$

where $T_j(\ell^*)$ is the j^{th} Chebyshev polynomials of the first kind with a proper scaling. This scaling is defined so that for $\ell \in [0, c_{max}]$, $\ell^* \in [-1; 1]$. Hence $\ell^* = \frac{2\ell}{c_{max}} - 1$, where c_{max} is an arbitrary value bounding the studied domain in terms of wetting correction. A complete method to obtain coefficients a_j is given in appendix B.

As shown in figure 4.17, $\frac{d\tau}{d\ell}$ tends to infinity when the deadrise angle tends to 90 degrees. As a consequence, an infinite number of Chebyshev polynomials is necessary to properly deal with this asymptotical behaviour. A better way to proceed is to use the Chebyshev decomposition to represent the quantity $\frac{d\tau}{d\sigma}$ instead of $\frac{d\tau}{d\ell}$. Here σ represents the curvilinear coordinate of the point of abscisse ℓ . The singular behaviour of $\frac{d\tau}{d\ell} = \frac{d\tau}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\ell}$ is now contained in $\frac{d\sigma}{d\ell}$. It is perfectly known from the definition of the shape itself. Since σ monotonically increases with ℓ for the shapes that are considered, integration in (4.15) can be performed on σ instead of ℓ . By noting $s = \sigma(c)$ and $\sigma_{max} = \sigma(c_{max})$ we hence have :

$$f(s(t)) = \int_{s(t)}^0 V(\sigma) W(s(t), \sigma) \frac{d\tau}{d\sigma} d\sigma. \quad (4.17)$$

$$V(\sigma) \frac{d\tau}{d\sigma} = \sum_{j=0}^N a_j T_j\left(\frac{2\sigma}{\sigma_{max}} - 1\right) \quad (4.18)$$

Coefficients a_j are obtained by using the same method than in the first case (see appendix B). The whole history of $s(t)$ is then directly obtained by integrating (4.18) by noting that :

$$\int_0^x T_n(l) dl = \frac{1}{2} \left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1} \right)$$

This history is directly linked to the history of $c(t)$.

4.4.2 Impact of a tulip-shape section

Let us consider the section defined by :

$$y = \log(a|x| + 1) / b, \quad (4.19)$$

where a is a parameter used to make the aspect of the section vary (see figure 4.19 (left)) and b is used to normalize the form *i.e.* to have $y(1) = 1$.

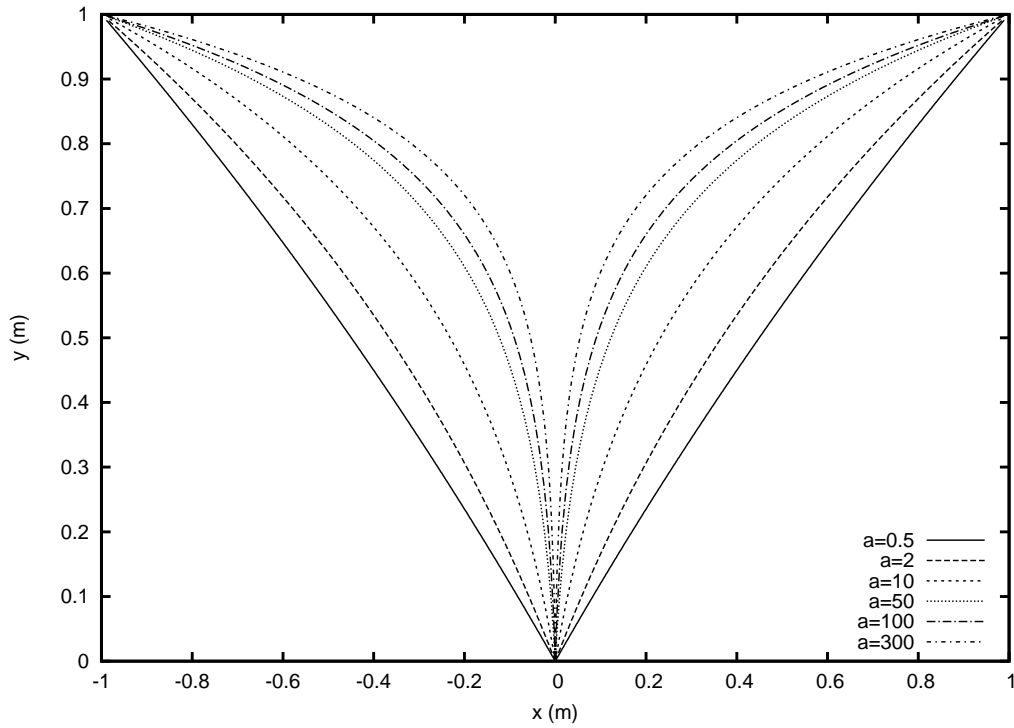


FIG. 4.18 – Geometric definition of the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5 ; 2 ; 10 and 50

This shape is very pathological since the deadrise angle tends to infinity at the apex and it tends to zero at $x = 1$. Figure 4.18 shows the resulting shapes for 5 values of a in $\{0.5; 2; 10; 50; 100\}$.

The predicted history of the position of the contact point is plotted in figure 4.19 for these values of a and figure 4.20 shows the history of the expansion velocity of the wetted surface. The distribution acting on the section during time is plotted in figure 4.21 as well as the maximum of pressure.

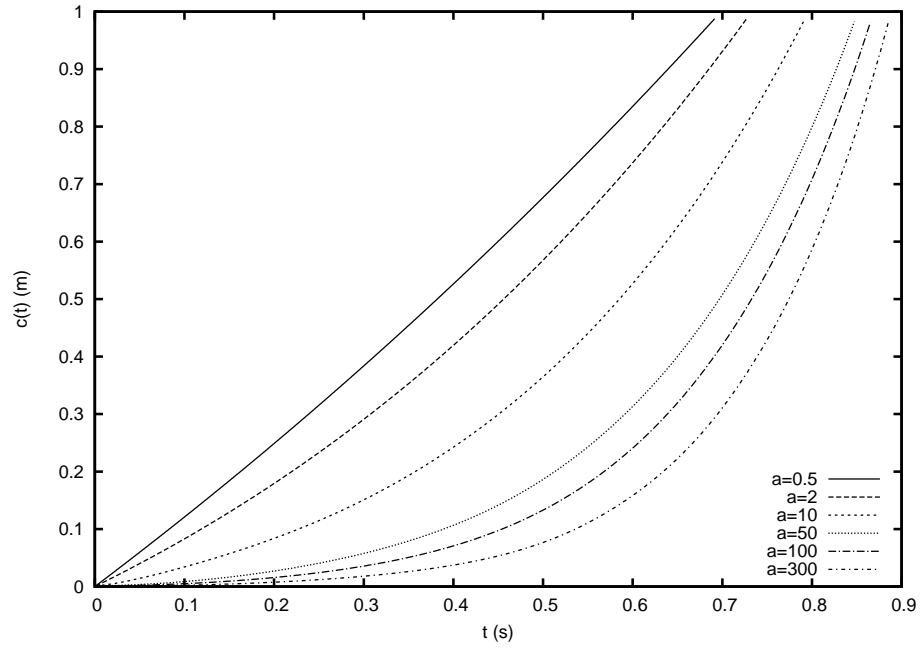


FIG. 4.19 – History of the contact point for the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5 ; 2 ; 10 and 50

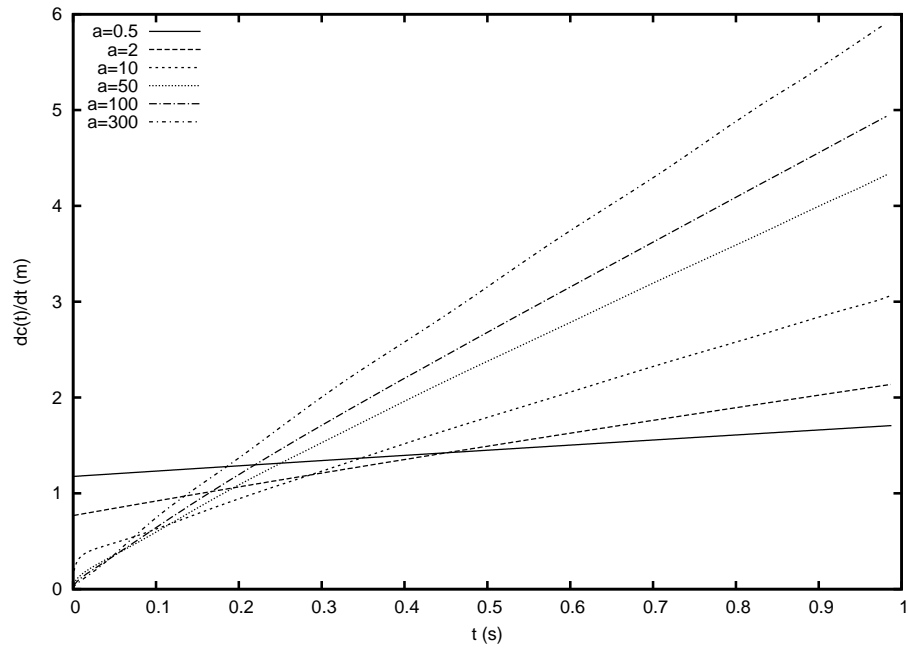


FIG. 4.20 – History of the expansion velocity of the wetted surface for the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5 ; 2 ; 10 and 50

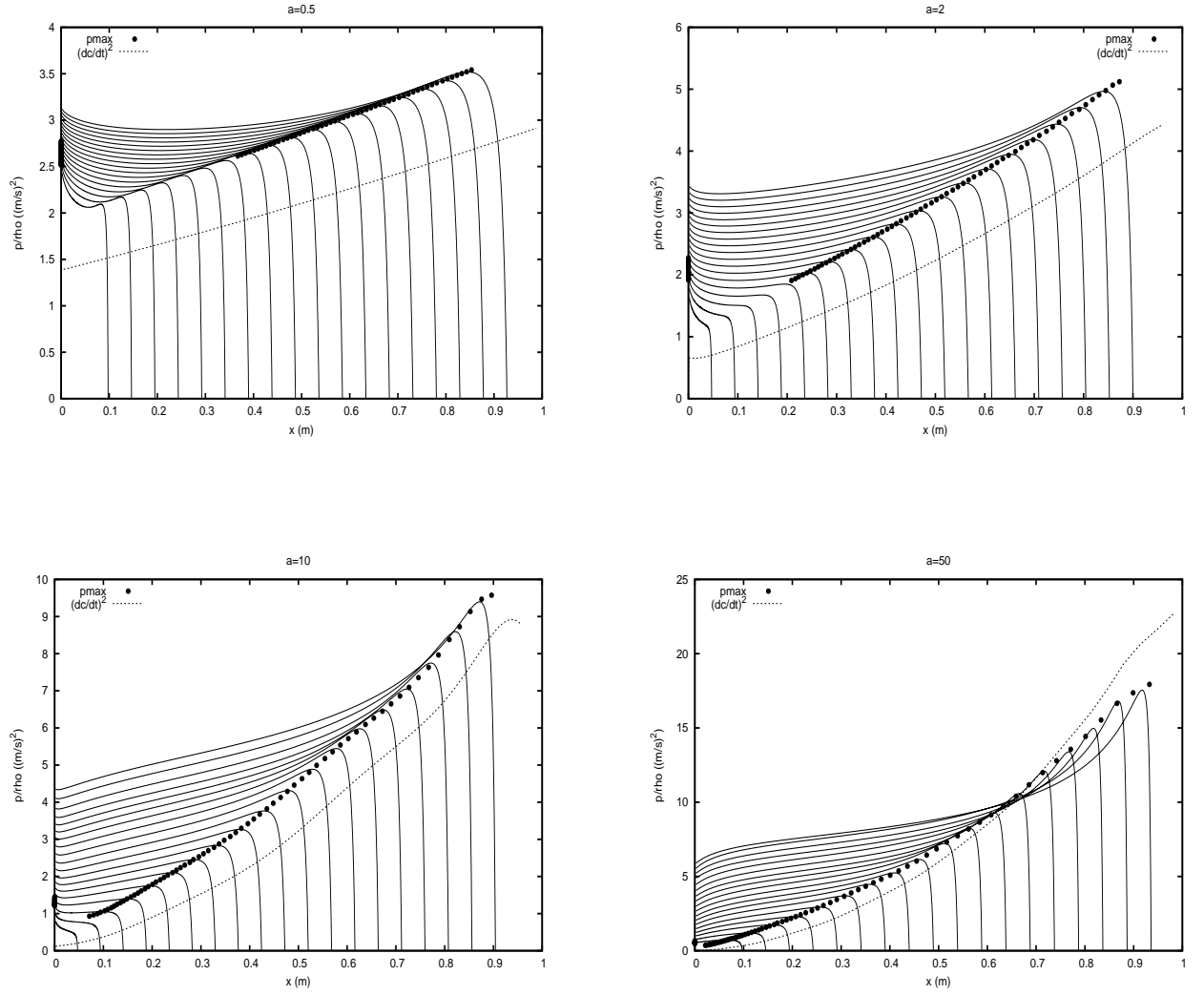


FIG. 4.21 – Pressure distribution at various instants for 4 values of a , maximum of pressure history (dashed lines) and its approximation $(dc/dt)^2$ (dotted lines)

It is well known that in the linearized Wagner model, the maximum of pressure behaves as $(dc/dt)^2$. Here, $(dc/dt)^2$ underestimates the maximum of pressure. This approximation becomes better when the parameter a increases. This can be explained by the fact that the largest a , the smallest the deadrise angle. It is interesting to note the particular shape of the pressure distribution, which present a local maximum at the apex. This characteristic remains present during the whole penetration. It is surprising since the deadrise angle is largest than anywhere else at the apex.

4.4.3 Sinus-like form

In this section, impact problem of a section defined it by a sinus function is considered. Cartesian coordinates x and y of a point on the surface of this section are linked by

$$y = f(x) = \frac{a}{\pi} \left(1 - \pi \arccos \left(\frac{x}{b} - 1 \right) \right). \quad (4.20)$$

This shape presents a sharp edge at its apex. The smaller the ratio between the width and the height of the section, the sharper the edge angle.

Forces in the horizontal and vertical directions

While the considered section is symmetric, the horizontal component of the force is equal to zero. But if only half a section is considered, as it must be the case for the problem sketched in figure 4.22 (left), it is not the case any longer. In that case we have to consider an artificial problem. In fact, since the wall can be considered as impermeable, the condition $\phi = 0$ can be prescribed on it and the half-section can be continued by its symmetric with regards to the wall.

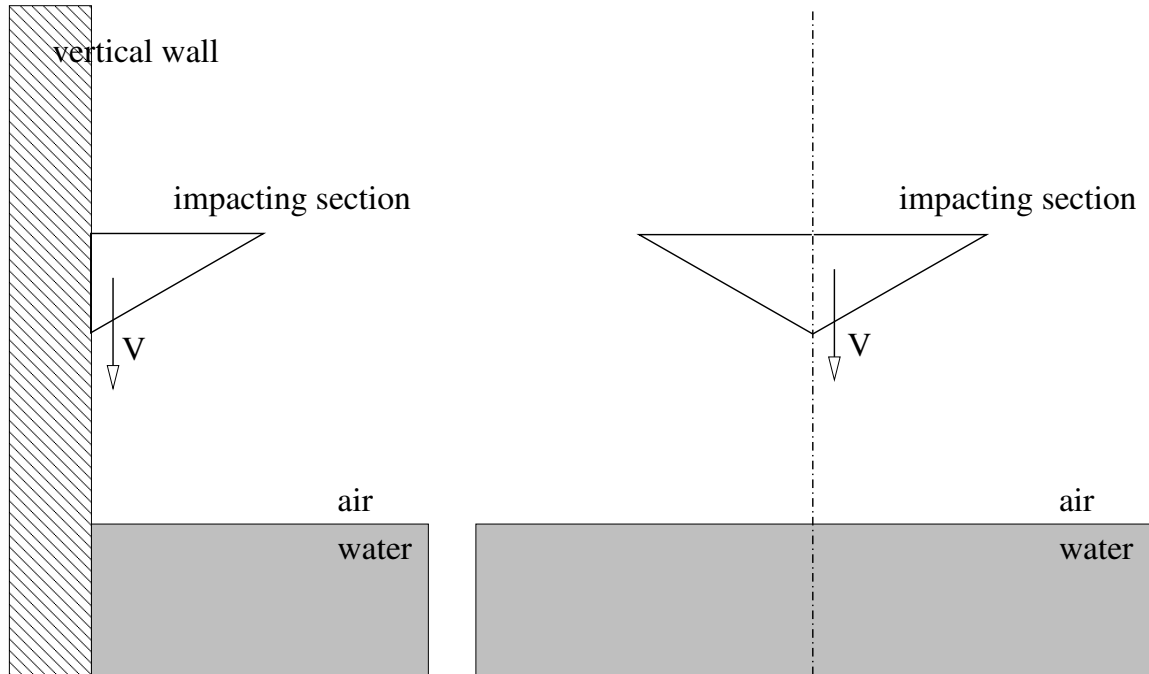


FIG. 4.22 – Impact of the wedge half-section along a vertical wall and equivalent symmetric problem

In figure 4.23, the two components of the force acting on the half-section are plotted. The section is successively defined as a circular cylinder and as a sinus-like. In the two cases, the added mass approximation (3.43) and (3.49) are used, as well as direct pressure integration. Details of the computation are given in section 3.4.3. In the case of the sinus-like section, the horizontal component remains negligible with regards to the vertical component. This is linked to the fact that its dimension in the vertical direction is smaller than those in the horizontal direction. In the case of the circular section, figure 4.23 shows that when the whole half section is immersed, the horizontal component of the force does not vanish anymore. Approximated computation of the forces yields to the same values when the wetting correction is maximum. In fact, in this particular case, coefficients A_n and B_n of decomposition (3.10) and (3.48) are equals.

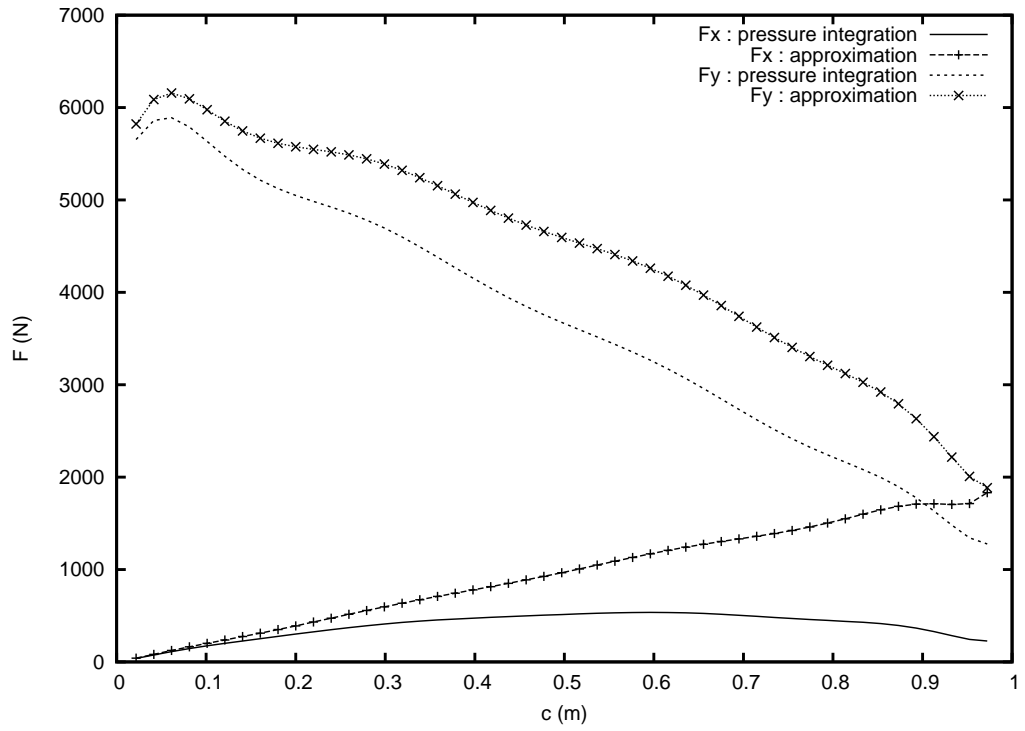
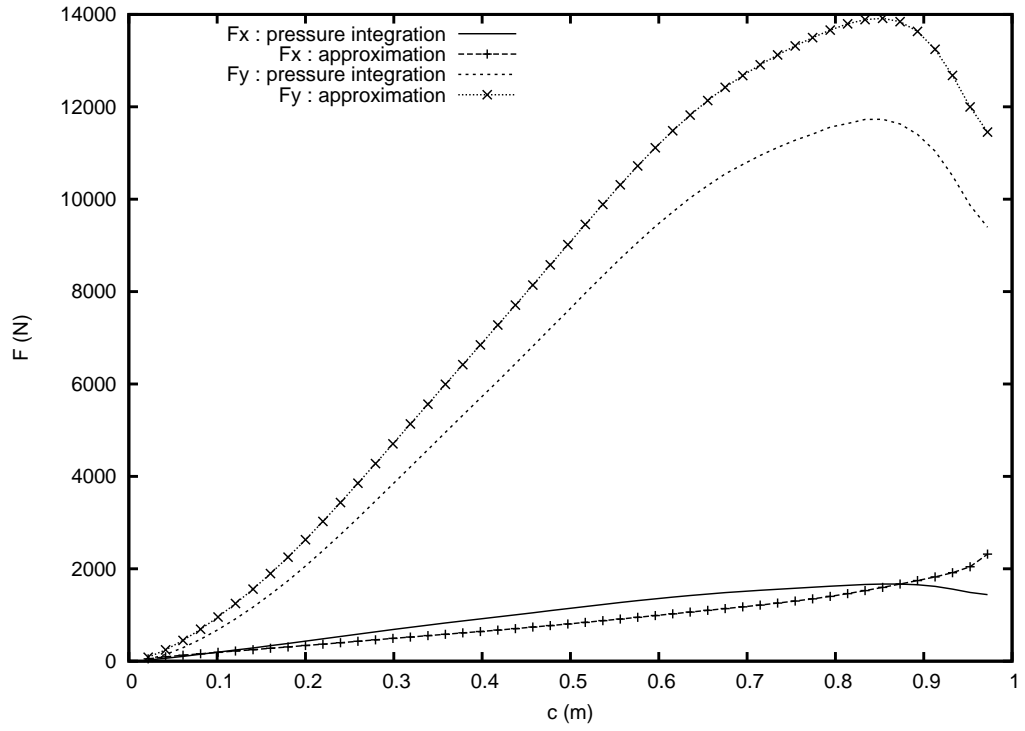


FIG. 4.23 – Force in the horizontal and vertical direction acting onto an impacting section. The shape of this section is sinusoidal (top) or circular (bottom)

Variability with the aspect ratio

Influence of the aspect ratio on sinus shape impact is investigated.

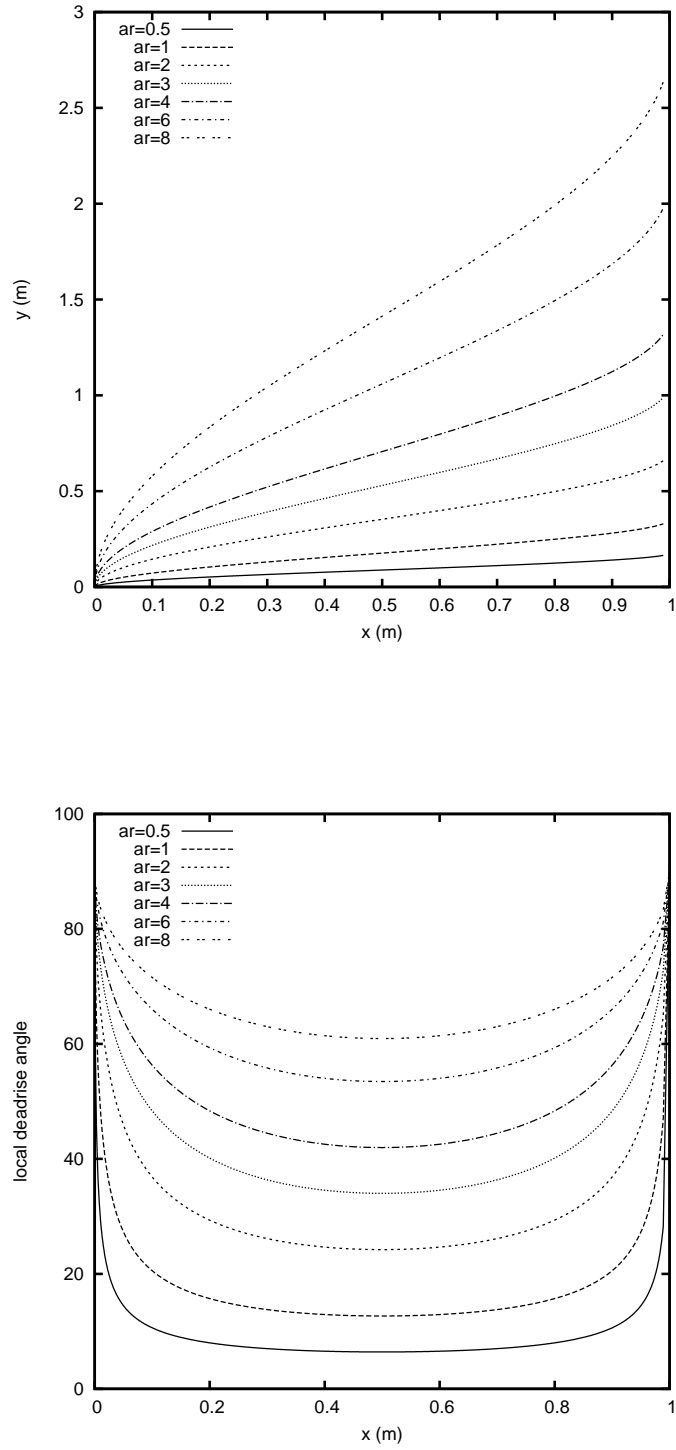


FIG. 4.24 – Geometry (top) and local deadrise angle (bottom) of the sinusoidal shape for aspect ratio varying from 0.5 to 8

Figure 4.24 (top) shows the different shapes considered as well as the local deadrise angle at each point of the section (bottom). The aspect ratio varies from 0.5 to 8. The history of the wetting correction on these shapes is plotted in figure 4.25, and the history of the velocity expansion of the wetted surface is plotted in figure 4.26. Figure 4.28 shows the distribution of the pressure at many times for the different values of the aspect ratio considered.

The smallest the aspect ratio, the highest the loads on the section. This result is not surprising since the deadrise angle is directly connected to the aspect ratio. The maximum of pressure is located at the point where the shape presents an inflexion point. It can be noted that the particular behaviour of the pressure at the apex, highlighted in the case of the tulip shape, does not occur here. However, we clearly distinguish a limiting value of the aspect ratio. In fact, if it is bigger than 4, the distribution of pressure does not present the characteristic shape of a peak. The maximum of pressure is then located close to the apex, instead of the neighborhood of the contact point. Once more, the maximum of pressure is well approximated by $(dc/dt)^2$ when the aspect ratio is small. The discrepancy is important for largest value (up to a factor 3 when the aspect ratio is equal to 8). In figure 4.27, the Modified Logvinovich Model (MLM) [Korobkin, 2004], [Korobkin and Malenica, 2005] is used to compute the maximum of pressure acting onto the section with aspect ratio successively set to 1,2,4 and 8. Approximation of the maximum of pressure by the square of the expansion velocity of the wetted surface is plotted for the two models. It should be noted that predicted expansion velocity is different in the two models.

As expected, MLM overpredicts in a significant way the maximum of pressure for aspect ratio larger than 3. When the aspect ratio is equal to 4, the discrepancy between the present model and MLM is approximatively equal to 25%. This can be correlated to the fact that this approximation, like the linearized Wagner one, is a good approximation while the deadrise angle remains small (smaller than 20°) (see figure 4.24).

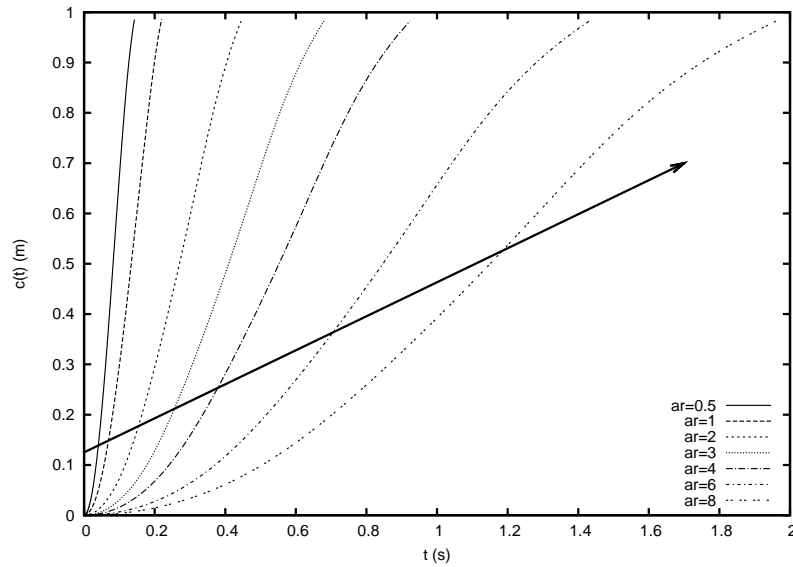


FIG. 4.25 – Time history of the contact point position for the sinusoidal shape with various aspect ratio. The arrow shows the increasing direction of the aspect ratio

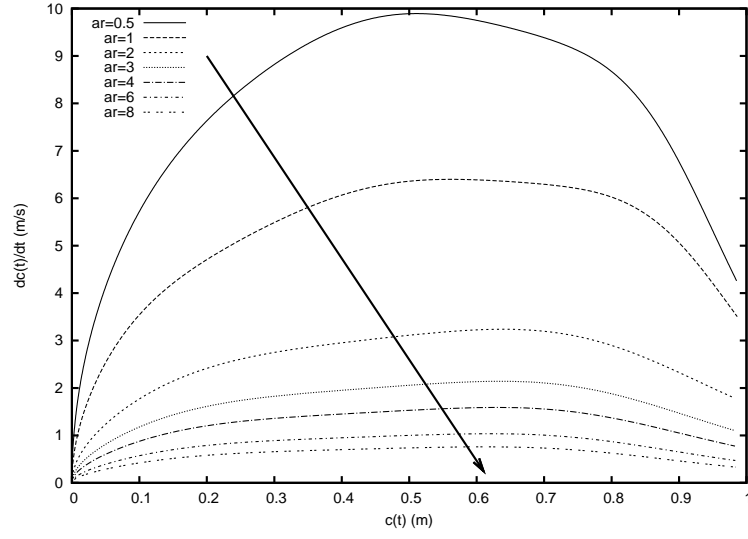


FIG. 4.26 – Time history of dc/dt for the sinusoidal shape with various aspect ratio. The arrow shows the increasing direction of the aspect ratio

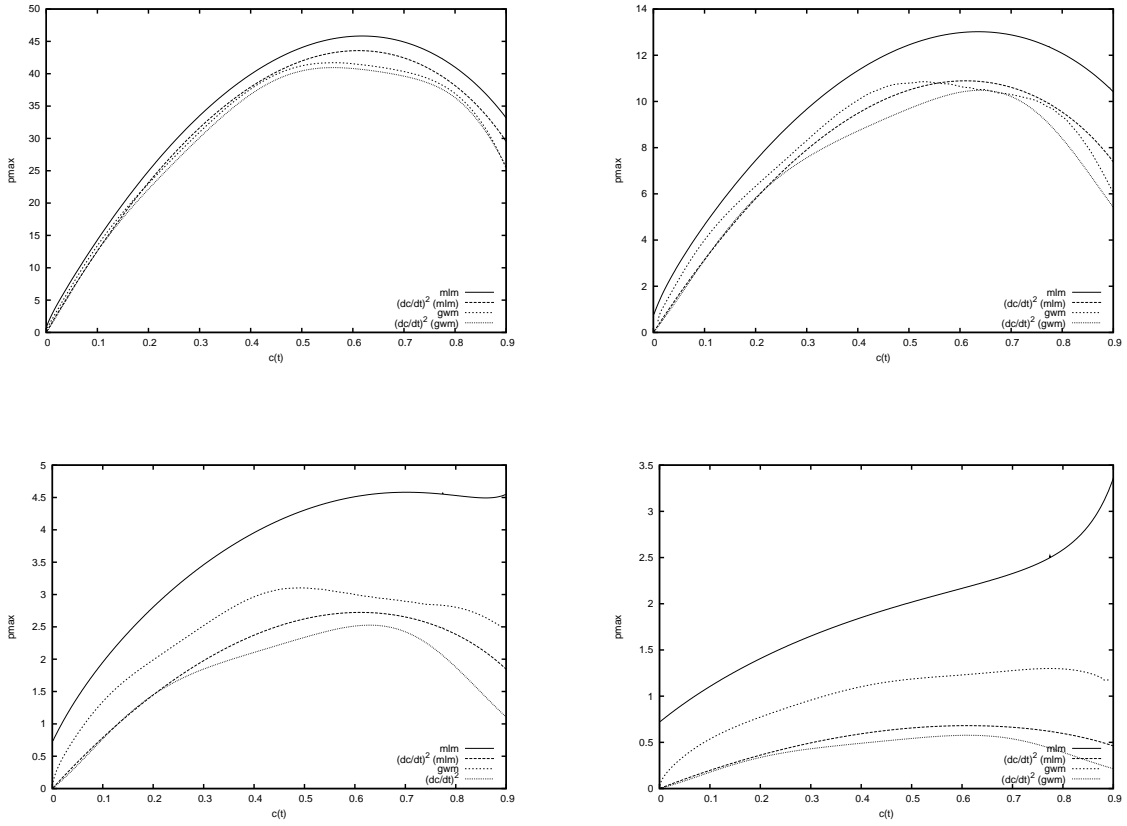


FIG. 4.27 – Prediction of the maximum of pressure by the present model (gwm) and by the modified Logvinovich method (mlm).

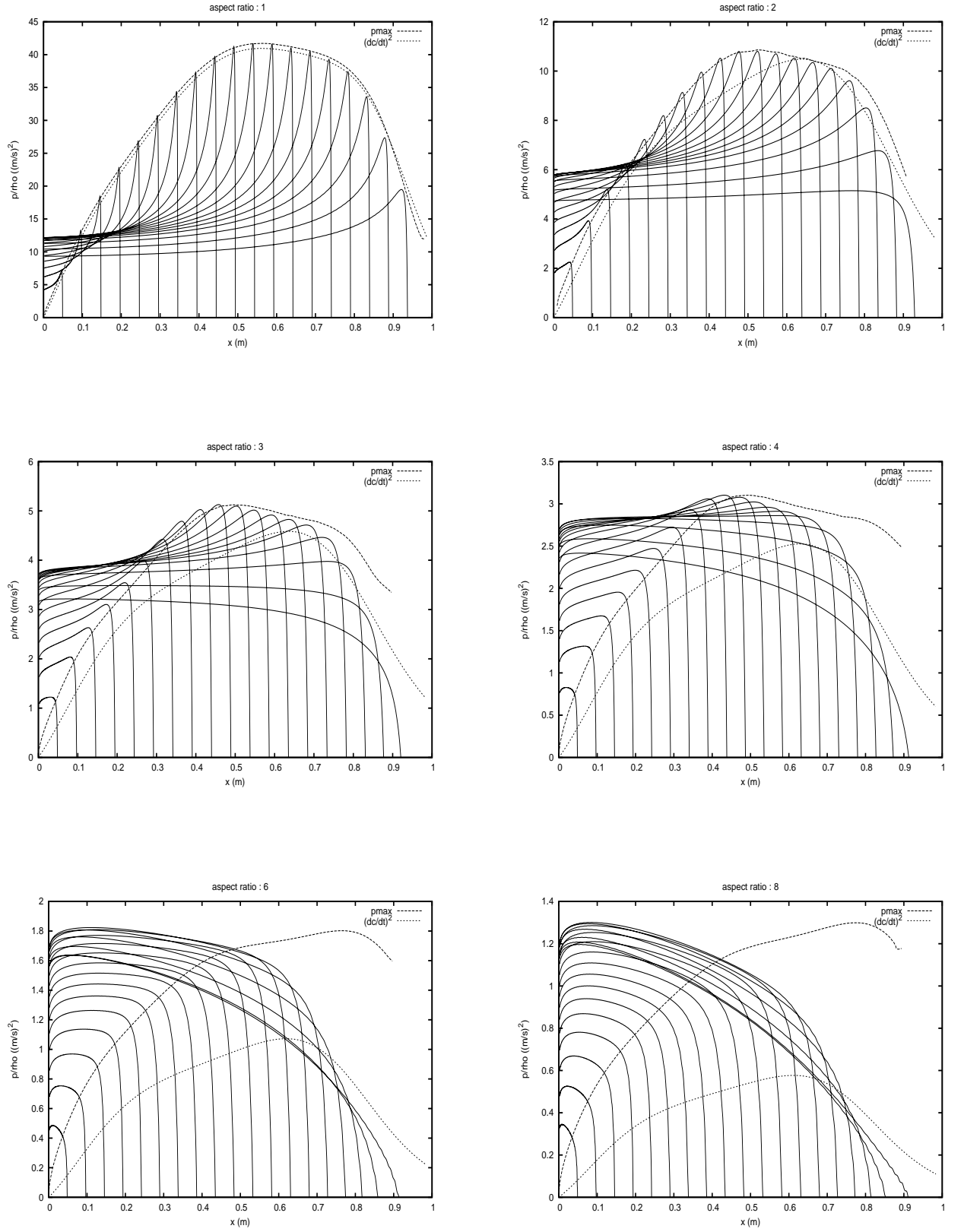


FIG. 4.28 – Pressure distribution for a sinusoidal shape with various aspect ratio. From left to right and top to bottom it is successively set to 1; 2; 3; 4; 6; and 8. The value of the maximum of pressure is plotted (dashed lines) as well as the square of the expansion velocity of the wetted surface (dotted lines)

Variability with the aperture of the section

In this section, we introduce a new variability on the sinus-like shape by considering that it can be more or less “opened”. In practice, it means that the shape is simply rotated of an angle of aperture noted γ (see figure 4.29).

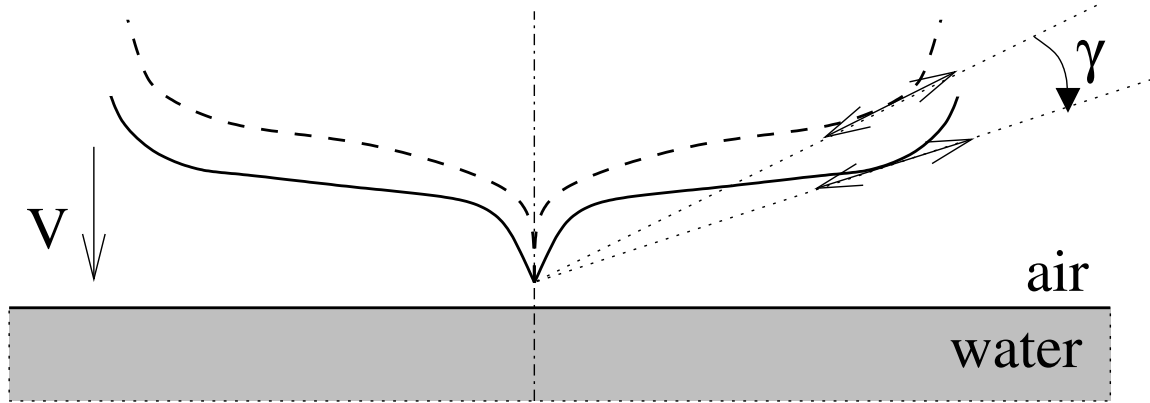


FIG. 4.29 – Modification of the sinus-like shape, relying on an angle of aperture γ , in order to reduce the angle at the apex

The maximum value of γ is limited by the smallest value of the deadrise angle along the surface of the original shape, *i.e.* $\tan \gamma < \min \left(\frac{df}{dx} \right)$. If it is not the case, the model is not accurate anylonger, since an air pocket can be formed.

Figure (4.30) shows the evolution of the wetting correction for 6 values of the aperture γ . The time derivative of the wetting correction is plotted in figure (4.31). It shows that the larger the aperture, the faster the expansion of the wetted surface. As a consequence, the maximum of the pressure increases with this aperture. As a consequence, very high pressure can be obtained for important value of the aperture, *i.e.* when the deadrise angle tends to zero. This results is not surprising. However, we have in mind that one of the hypothesis of the present model lies in the fact that hydrodynamic pressure is bounded by the acoustic one $p_{ac} = \rho cv$. It means that the model is not valid anylonger beyond this limit.

Figure 4.32 shows the pressure distribution at many successive instants, for 6 values of γ , as well as the maximum of pressure is plotted and its approximation $(dc/dt)^2$. This approximation remains very good for all the value of the aperture considered here (maximum discrepancy is about 5%) As expected, the peak of pressure occurs at the point where the deadrise angle is the smallest.

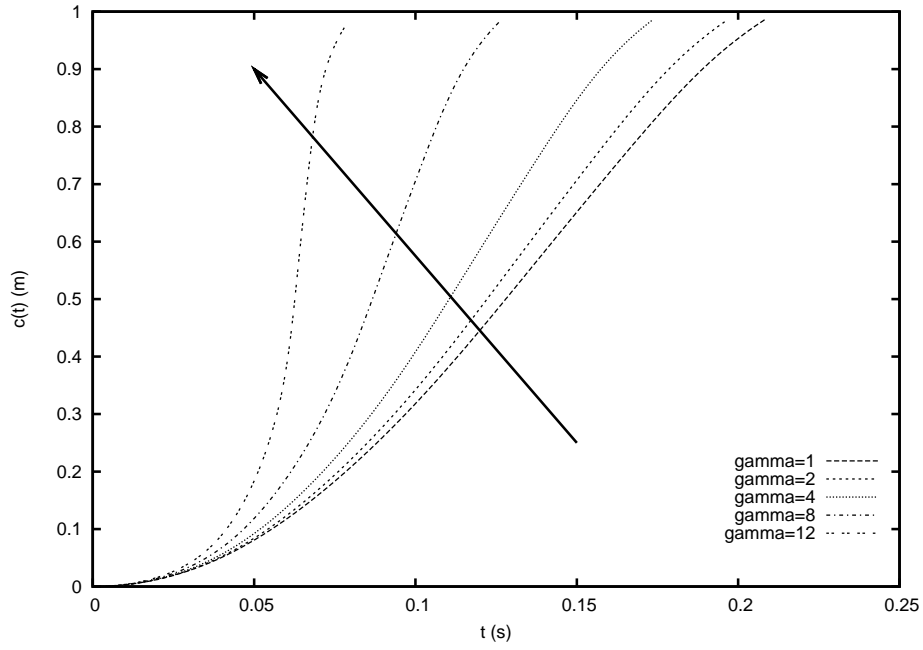


FIG. 4.30 – Time history of the contact point position for the sinusoidal shape with various value of the aperture. The arrow shows the increasing direction of this aperture

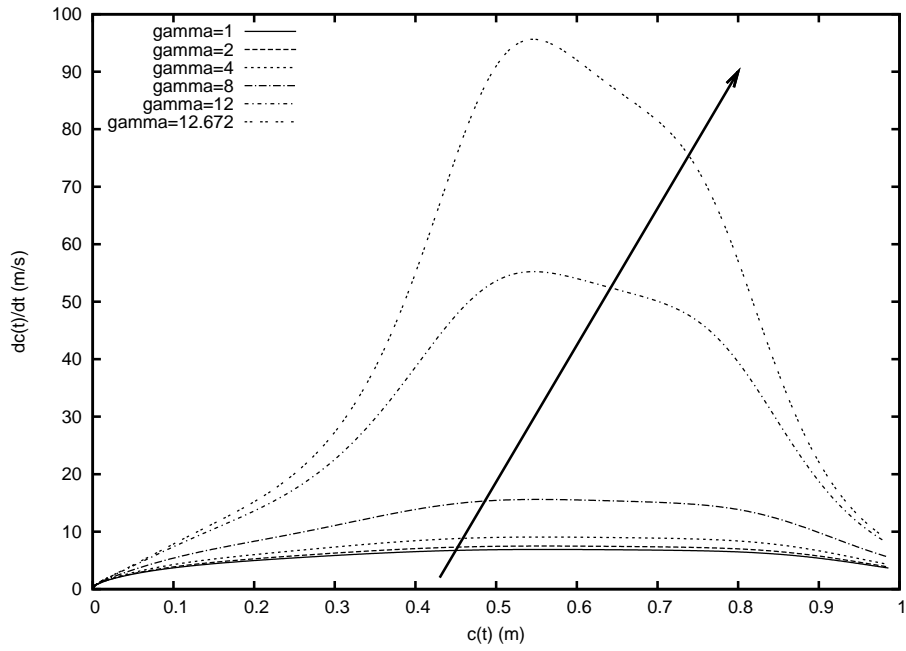


FIG. 4.31 – Time history of the expansion velocity of the wetted surface for the sinusoidal shape with various value of the aperture. The arrow shows the increasing direction of this aperture

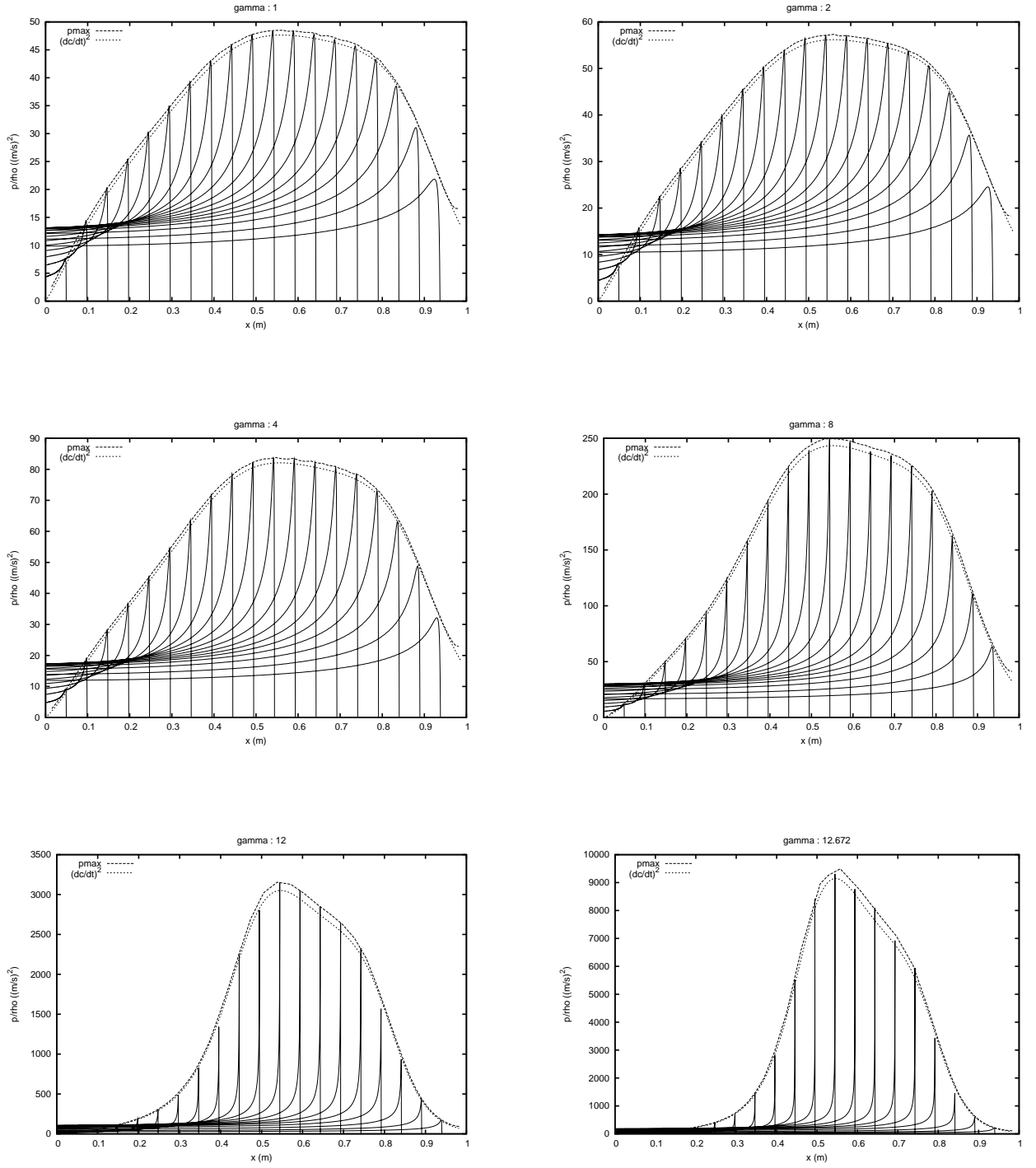


FIG. 4.32 – Pressure distribution for a sinusoidal shape with various value of the aperture. From left to right and top to bottom it is successively set to 1° , 2° , 4° , 8° , 12° , 12.762° . The value of the maximum of pressure is plotted (dashed lines) as well as the square of the expansion velocity of the wetted surface (dotted lines)

4.5 Conclusions

In the present chapter, we highlight some important properties and limitations of the generalized Wagner approach. Main limitations of this model are due to the fact that the jet is simply cut. As a consequence, conservation of the energy is not verified at each time and it is difficult to deal with non-viscous flow separation when it occurs.

The way to compute wetting corrections in chapter 3 has been modified, in order to deal with more complicated shapes. In fact, our study was limited to sections presenting a smooth aspect at the initial contact point in chapter 3.

No satisfactory solution is found, neither to ensure energy conservation, nor to properly deal with flow separation during the impact. A way to quantify the importance of these two phenomena during the simulation is proposed nevertheless.

Chapitre 5

Generalized Wagner model for 2D symmetric and elastic bodies

5.1 Introduction

The previous two chapters focus on the properties of the generalized Wagner model in the case of rigid impact. The aim of the present chapter is to use this model in a coupled way, *i.e.* to deal with impact of symmetric and elastic bodies. In that case, the main difficulty is to couple the hydrodynamic problem with the elastic deformations of the body. In practice, we must deal with the time varying shape of the wetted surface. That makes the problem highly nonlinear since we want to solve a fully coupled problem, *i.e.* to prescribe the continuity of both the stress and the velocity at the wetted interface. As shown in chapter 3, the usual way to solve the rigid problem is to decompose the inverse expansion velocity of the wetted surface as polynomials of the contact point position (see [Mei *et al.*, 1999] but also [Wagner, 1932]). This is quite reasonable for smooth body shape. The case of a shape presenting a sharp edge at the apex has been handled in chapter 4 in the same spirit. The position of the contact point is obtained at any time by solving the equation (sometimes called Wagner condition) resulting of continuity of the vertical displacement at the contact point. Fortunately, even if the deformations might be high, we can rely on the fact that the shape remains smooth. Hence, we can solve the hydro-elastic problem in the same spirit. The theory is presented in [Scolan, 2007]. The time history of the elastic shape has to be evaluated simultaneously. The aim of the present study is to show how to proceed. The coupled boundary value problem is formulated in section 5.2. In section 5.3 and 5.4, an algorithm of resolution is proposed. The solution is obtained iteratively. This algorithm is applied to elastic wedges, with various boundary conditions in section 5.5. Obtained results are compared to the results of a linearized Wagner model [Scolan, 2002]. A parametric study is then performed. Parameters are : thickness of the section, water entry velocity and deadrise angle.

5.2 Boundary value problem

The hydrodynamic problem is illustrated in figure 5.1. It corresponds to the free falling of a deformable body onto a liquid, initially at rest.

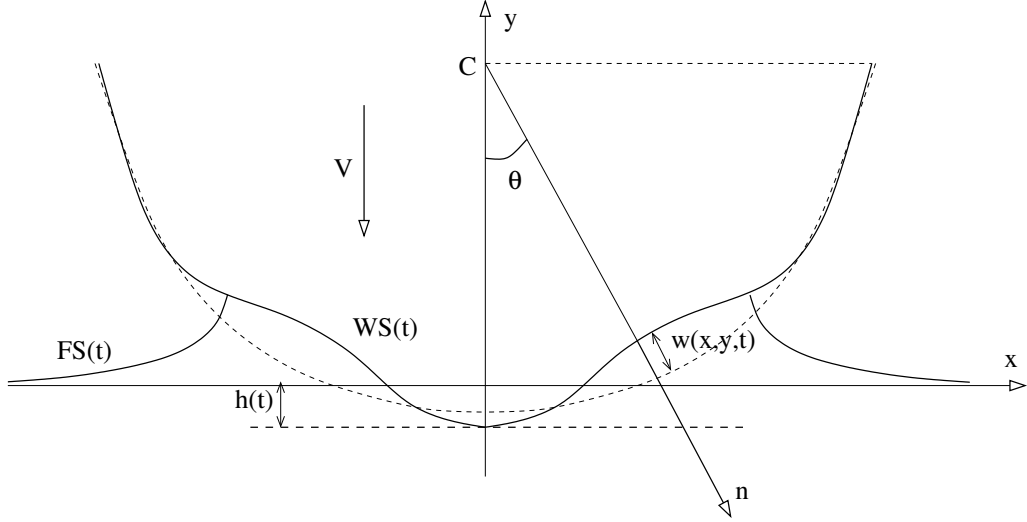


FIG. 5.1 – Sketch of the hydrodynamic problem of a deformable section hitting a free surface. Dashed lines represent the undeformed shape of the section

The problem can be formulated as a boundary value problem (BVP) for the velocity potential φ and the deflection w .

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\varphi = 0 & y < 0 \\ \varphi = 0 & \text{on FS}(t) \\ \varphi_{,n} = \vec{V} \cdot \vec{n} + w_{,t}(x, y, t) & \text{on WS}(t) \\ \varphi \rightarrow 0 & (x^2 + y^2) \rightarrow \infty \\ \dot{h} = V(t) & \\ L(w) + \rho_s e(\ddot{w} - \dot{V}) = p(x, y, t) & \text{on the wetted part of the body} \\ w(x, y, 0) = h(0) = 0 & \text{at initial time } t = 0 \\ \dot{h} = V_{ini} & \text{at } t = 0 \\ M\dot{\vec{V}} = - \int_{WS(t)} p(x, y, t) \vec{n} ds & \text{Newton law of free falling} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

In the sequel, the velocity of penetration is directed downwards and it is noted $\vec{V} = -V\vec{y}$. The normal \vec{n} is directed towards the fluid. e denotes the thickness of the section and ρ_s its density. The equations which couple the structural and hydrodynamic problems are the continuity conditions at the wetted surface, both written in terms of stress and normal velocity. The deflection w of the membrane is measured in a Lagrangian way, from its undeformed shape, as shown in figure 5.1. The normal velocity due to the deformation is noted \dot{w} . Stress continuity condition makes appear an operator $L(w)$ which is function of the considered shape. Actually it may contain nonlinear terms. However these terms are spatial derivatives of w only.

In a first approach, simple model are considered for the structure, which is considered to be non extensible. As a consequence, only radial deflection w is considered and this deflection only depends on time t and on the azimuthal angle θ (see figure 5.1). A set of functions w_n over which the deflection $w(x, y, t)$ is defined :

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) w_n(\theta). \quad (5.2)$$

Functions $q_n(t)$ are the weights of each mode. The formulation of the problem is given for an arbitrary symmetric shape under the assumption that we are able to find an analytical

expression for the modal deformations w_n . For particular shapes, such as circular cylinder section or wedges and for suitable boundary conditions, expressions of w_n are simple to obtain.

5.3 Hydrodynamic problem

The hydrodynamic problem is solved according to the assumptions of the so-called generalized Wagner model as introduced by [Zhao *et al.*, 1996]. This means that the boundary condition is prescribed on the exact wetted surface but the free surface is linearized on lines emanating from the contact points as detailed in chapter 3. As the problem is symmetric, there is only one contact point to determine, noted $c(t)$. The time integration of the kinematic free surface condition is thus used to provide $c(t)$:

$$f(c(t), t) - h(t) = \int_0^t \varphi_{,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau) d\tau. \quad (5.3)$$

This equation reveals the approximation of the generalized Wagner model, since the integrand $\varphi_{,y}$ is calculated at $x = c(t)$. It should be noted that now the problem becomes much more complicated than the rigid case since the shape of the body, denoted f , evolves in time. However we can assert that the vertical component of the contact point only depend on $c(t)$, if we admit that $c(t)$ increases monotonically in time. As done by [Mei *et al.*, 1999] and further developed by [Malleron and Scolan, 2007], conformal mappings are used to transform the fluid domain into the half lower space. The hydrodynamic problem is then reformulated as a Riemann-Hilbert problem and a quasi-analytical solution can be exhibited. Through the successive conformal mappings used, the wetting surface becomes a unit circle (actually its half). The BVP (5.1) is highly nonlinear and an iterative procedure must be implemented to converge towards its solution (see figure 5.2).

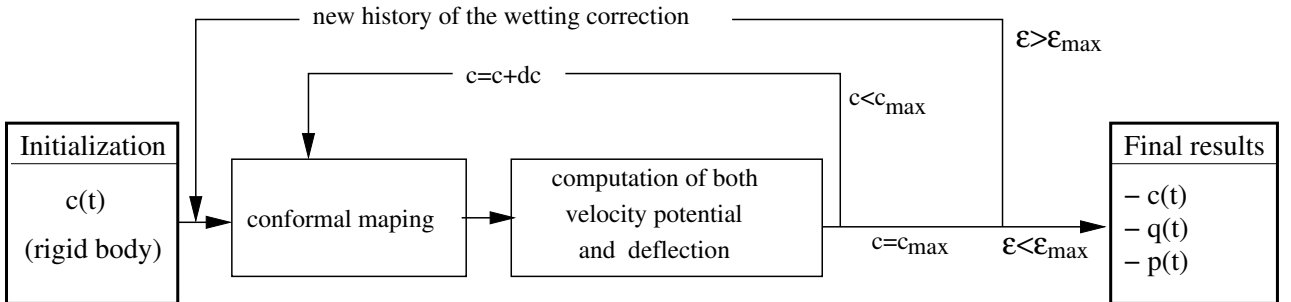


FIG. 5.2 – Algorithm used to obtain the solution of the fully coupled problem.

At each iteration, the time evolution of the problem should be computed by iteration too. The history of the weights q_n is built step by step by solving a differential system, detailed in the next section. For each value of $c(t)$, which is considered as the variable of evolution, the right hand side of the differential system must be explicated. That requires both the computation of the velocity potential and the knowledge of the expansion velocity $\frac{dc}{dt}$ of the wetting surface. This latter data is known from the previous computation of the wetting correction time history (first level of iteration). First, we consider the impermeability condition which is reformulated as

$$\varphi_{,n} = -V \vec{y} \cdot \vec{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n w_n(\theta), \quad (5.4)$$

where the over-dot stands for time derivative. Knowing the shape at a given time, this allows to break down the potential φ into two components

$$\varphi(x, y, t) = V(t)\phi(x, y, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \phi_n(x, y, t). \quad (5.5)$$

The vertical velocity on the free surface, which appears in the integrand of (5.3), is broken down similarly. Once $c(t)$ and the weights $q_n(t)$ are known, the body shape is fully described¹. and the components $\phi(x, y, t)$ and $\phi_n(x, y, t)$ are solutions of the following BVPs respectively

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & y < 0 \\ \phi = 0 & \text{on FS}(t) \\ \phi_{,n} = -\vec{y} \cdot \vec{n} & \text{on WS}(t) \\ \phi \rightarrow 0 & (x^2 + y^2) \rightarrow \infty, \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi_n = 0 & y < 0 \\ \phi_n = 0 & \text{on FS}(t) \\ \phi_{n,n} = w_n(\theta) & \text{on WS}(t) \\ \phi_n \rightarrow 0 & (x^2 + y^2) \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (5.6)$$

By using adequate conformal mappings, transforming $WS(t)$ into a flat plate, these BVPs are formulated as Riemann-Hilbert problems. We denote α the azimuth in the complex plane where the body contour is a half unit circle. Solution of the first BVP is well known since it corresponds to the rigid problem, detailed in chapter 3. For ϕ_n , solution of the second BVP (5.6), calculations are more complicated since the corresponding stream function ψ_n on the body contour follows from the integration in s of $\psi_{n,s}$. The relation between θ and s follows from geometric considerations only, as illustrated in figure 5.3

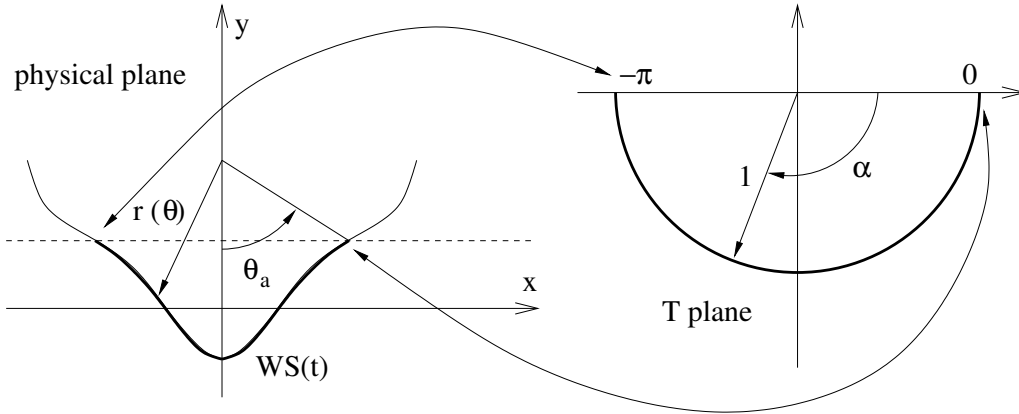


FIG. 5.3 – Transformation linking a point of azimuthal coordinate θ in the physical plane to a point parametrized by α in the transformed plane where the body is a circle.

In the physical plane, the wetted surface is defined by the interval $|\theta| < \theta_a$. By using

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} \frac{d\psi}{ds}, \quad (5.7)$$

the first term of the RHS is the inverse of $\vec{y} \cdot \vec{n}$ and then it is proved that a limiting case occurs when the normal along the body contour becomes almost horizontal. This quantity however can be expanded in Fourier series as

$$\frac{ds}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sin(m\alpha), \quad (5.8)$$

¹This does not mean that the weights $q_n(t)$ do not depend on $c(t)$.

where s is the curvilinear coordinate of a point of the elastic body. $\frac{d\psi_n}{d\alpha}$ is known from the Neumann boundary condition on the wetting surface. While we only consider symmetric modes, we are able to show that

$$\psi_n = K + \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \cos(m\alpha). \quad (5.9)$$

In that case, K corresponds to the abscisse of the stagnation point of the flow around the body. In a symmetric case, $K = 0$. The way to obtain the C_{nm} is based on the compatibility condition

$$\phi_{n,n} = \psi_{n,s} = w_n(\theta). \quad (5.10)$$

As a consequence,

$$\psi_{n,\alpha} = \frac{ds}{d\alpha} w_n(\alpha). \quad (5.11)$$

Since this quantity can be decomposed as

$$\psi_{n,\alpha} = \sum_m^{\infty} C_{mn}^* \sin m\alpha, \quad (5.12)$$

the C_{mn} are deduced from (5.12) by

$$C_{mn} = -\frac{C_{mn}^*}{m}. \quad (5.13)$$

Hence, ϕ_n is obtainable in a similar way than the rigid solution. It yields :

$$\phi_n = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin(m\alpha). \quad (5.14)$$

On one hand, we end up with the expressions of ϕ and ϕ_n on the body contours

$$\phi(\alpha) = -\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\alpha), \quad \phi_n(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} \sin(m\alpha), \quad (5.15)$$

which are quite similar and where the computation of A_m and C_{mn} does not require a significant effort. On an other hand, the vertical velocity on the free surface is also obtainable from

$$\phi_{,y} = \frac{1}{\pi J(u)} \sum_{m=1}^{\infty} A_m L_m(u), \quad \phi_{n,y} = \frac{1}{\pi J(u)} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn} L_m(u) \quad (5.16)$$

where u is the image of a point on the free surface in the complex plane where the wetted surface of the body is a flat plate and $J(u)$ is the Jacobian of the transformation at that point. The functions $L_m(u)$ are known functions of u which are calculated recursively. The knowledge of the vertical velocity on the free surface is required to compute the wetting corrections, as it was already the case for rigid impact.

5.4 Coupled problem

The coupling is performed after some transformations of the time differential system for the deflection. Attention should be paid to the fact that in practice, the hydrodynamic problem is

solved for an associated “double body” problem (see [Mei *et al.*, 1999]). The physical pressure is then given by Bernoulli law :

$$p(x, y, t) = -\rho_f \Phi_{,t} - \frac{1}{2} \rho_f (\vec{\nabla} \Phi)^2 = -\rho_f \frac{d\varphi}{dt} + \rho_f \frac{d}{dt} (Vy') + \rho_f \dot{\vec{X}} \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{2} \rho_f (\varphi_{,x}^2 + (\varphi_{,y} - V)^2), \quad (5.17)$$

where ρ_f is the density of the fluid and Φ the velocity potential in the “double body” problem. $\dot{\vec{X}}$ is the local velocity along the body contour and y and y' are linked by : $y' = y - \eta(c(t))$. We collect the non linear terms that are denoted :

$$U(\theta, t) = \rho_f \dot{\vec{X}} \vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{2} \rho_f (\varphi_{,x}^2 + (\varphi_{,y} - V)^2). \quad (5.18)$$

since U is evaluated on the body contour and hence it only depends geometrically² on θ . Introducing this in the equation for the deflection w , we get

$$L(w) + \rho_s e(\ddot{w} - \dot{V}) = -\rho_f \frac{d(\varphi - Vy')}{dt} + U(\theta, t). \quad (5.19)$$

Time derivatives are collected and the variable $Q(\theta, t)$ as

$$Q(\theta, t) = \rho_s e(\dot{w} - V) + \rho_f (\varphi - Vy'), \quad (5.20)$$

is introduced, yielding the differential system

$$\begin{cases} \dot{w} = \frac{Q}{\rho_s e} + V - \mu(\varphi - Vy'), & \mu = \frac{\rho_f}{\rho_s e}, \\ \dot{Q} = -L(w) + U(\theta, t) \end{cases} \quad (5.21)$$

The variables w and Q are then projected on the normal modes. By using the orthogonality of these functions for the inner product

$$\int_{-\pi}^{\pi} w_m(\theta) w_n(\theta) d\theta = W_{mn} \delta_{mn}, \quad (5.22)$$

we end up with

$$\dot{q}_m = \frac{Q_m}{\rho_s e} - \frac{\mu}{W_{mm}} \int_0^{\theta_a} (\varphi - Vy') w_m(\theta) d\theta, \quad (5.23)$$

and :

$$\dot{Q}_m = -L(q_m) + \frac{1}{W_{mm}} \int_0^{\theta_a} U(\theta, t) w_m(\theta) d\theta = R_Q, \quad (5.24)$$

where θ_a is the azimuthal coordinate of the contact point. The interval of integration in (5.23) and (5.24) is halved due to symmetry. Decomposition of φ in equation (5.5) is then introduced in (5.23) which is written in a matrix form

$$\sum_{p=1}^{\infty} S_{mp} \dot{q}_p = R_q = \frac{Q_m}{\rho_s e} - \frac{\mu V}{W_{mm}} \int_0^{\theta_a} (\phi - y') w_m(\theta) d\theta, \quad S_{mp} = \delta_{mp} + \frac{\mu}{W_{mm}} \int_0^{\theta_a} \phi_p w_m(\theta) d\theta. \quad (5.25)$$

²When θ varies in the interval $|\theta| < \theta_a$, we can alternatively and simply use the dependency on α . In particular the quadratic term $(\nabla \varphi)^2$ is easily obtained from the complex velocity evaluated on the body contour.

The integrand in R_q does not present any singularity and the integration is performed using a midpoint method. On the contrary, the integrand in R_Q is singular at the contact point. However, this singularity is perfectly known and can be properly integrated.

A limitation of this formulation is that the area where the pressure becomes less than zero (see [Malleron and Scolan, 2007]) is not clearly identified. The pressure is computed *a posteriori* hence there is no way to determine where the pressure is equal to zero before to perform the integrals from (5.23) to (5.25).

The decomposition (5.5) is introduced in (5.3) as well, yielding

$$\begin{aligned} f(c(t), \dot{q}(t)) = & \int_0^t U(\tau) \left(1 + \phi_{,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau) \right) d\tau \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \dot{q}_m(\tau) \phi_{m,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.26)$$

It is worth noticing that in the integrands, $\phi_{,y}$ and $\phi_{m,y}$ only depend on $c(t)$ and on the current shape at time τ . It means that the shape is completely defined by $c(\tau)$ and $q_m(\tau)$, the weights of each deformation modes used to describe the deflection of the structure.

In the same spirit that for the rigid case, we introduce the new variables

$$W(c(t), c(\tau), q(\tau)) = 1 + \phi_{,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau), \quad (5.27)$$

and

$$W_m(c(t), c(\tau), q(\tau)) = \phi_{m,y}(c(t), \eta(c(\tau), \tau), \tau). \quad (5.28)$$

As usual for equation (5.26), the new variable $\ell = c(\tau)$ for $\tau < t$ is used. As proposed by Mei *et al.* (1999), the inverse velocity of expansion of the wetted surface is decomposed as

$$V(\ell) \frac{d\tau}{d\ell} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j(\ell^*), \quad (5.29)$$

where $T_j(\ell^*)$ is the j^{th} Chebyshev polynomials of the first kind with a proper scaling. This scaling is defined to obtain $\ell \in [0, c_{max}]$, $\ell^* \in [-1; 1]$. Hence $\ell^* = \frac{2\ell}{c_{max}} - 1$, where c_{max} is an arbitrary value bounding the studied domain in terms of wetting correction. Coefficients a_j are new unknowns and they must be determined. When they are known, the algorithm, defined in chapter 4 by equations (3.26) to (3.28), is used to get the final value of $c(t)$. Introducing (5.29) in the first integral of (5.26), we get

$$f(c(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^{c(t)} W(c(t), \ell, q(\ell)) T_j(\ell^*) d\ell + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{c(t)} \frac{dq_m}{d\ell} W_m(c(t), \ell, q(\ell)) d\ell. \quad (5.30)$$

This equation is solved by collocation. However, due to its highly nonlinear nature, we proceed iteratively. We first solve the rigid case problem. This means that, for a given shape (undeformed one), we determine a_j by solving

$$f(c(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \int_0^{c(t)} W(c(t), \ell, 0) T_j(\ell^*) d\ell, \quad (5.31)$$

The equations (5.23) and (5.24) are solved in time to build the time history of $q_n(t)$ which

is necessary to solve equation (5.30). These equations are written as a Cauchy problem in the form

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_q \\ R_Q \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

For the approximated time variation of $c(t)$, the Cauchy problem (5.32) is solved with some modifications

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dq}{dc} \\ \frac{dQ}{dc} \end{pmatrix} = \frac{1}{V(c)} \sum_{j=0}^{\infty} a_j T_j \left(\frac{2c}{c_{max}} - 1 \right) \begin{pmatrix} R_q \\ R_Q \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

As explained in section 5.3 and summed up in figure 5.2, equation (5.30) is solved once more by collocation with some corrections due to elasticity and the time history of $c(t)$ is modified. It should be noted that, even if the modal weights are explicitly required, only $\frac{dq_m}{dt}$ is used in equation (5.30). We stop when the coefficients a_j hardly change.

If the vertical velocity is not set as constant, Newton law must be time integrated as well. In that case, according to the formula by [Newman, 1977] we have

$$M \frac{dV}{dt} = -\rho_f \frac{d}{dt} \int_{D(t)} \varphi(\theta, t) \vec{n} \cdot \vec{y} ds, \quad (5.34)$$

where M is the mass of the falling body in air. Equation (5.34) gives an explicit expression of the velocity and therefore the additional differential equation for $h(t)$ is

$$M \frac{dh}{dt} = MV_{ini} - \rho_f \int_{D(t)} \varphi(\theta, t) \vec{n} \cdot \vec{y} ds. \quad (5.35)$$

In the integrand all quantities are known as Fourier series of α . Hence the integration is preferably performed in the complex plane where the body is a half unit circle.

5.5 Applications

Hydroelastic impact of a wedge is now considered. In that case, the linear operator L in (5.1) simply reads

$$L(w) = \Delta \Delta w. \quad (5.36)$$

Three kinds of boundary condition (BC) can be applied, as sketched in figure 5.4. Boundary condition of type 1 (BC1) corresponds to a case where both the apex and the outer edges are clamped. BC2 corresponds to the case where only outer edges are clamped, while BC 3 corresponds to the case where only the apex is clamped. No displacement and no rotation are allowed at points where a clamped condition is prescribed.

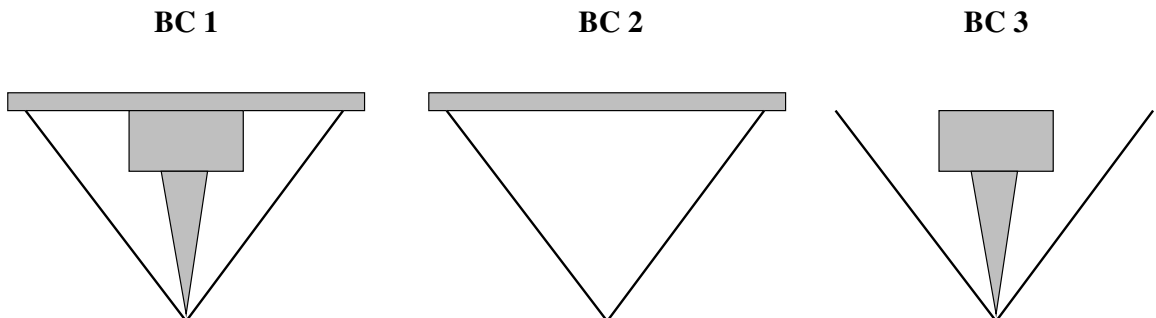


FIG. 5.4 – Sketch of the three type of boundary condition applied on the elastic wedge

For each boundary condition, corresponding modes are explicated in table 5.1 in terms of shape function w_m and wave numbers k_m . Numbers k_m are linked to the pulsations ω_m by

$$\left(\frac{k_m}{R}\right)^4 = \frac{\rho_s e \omega_m^2}{D} \quad (5.37)$$

BC	w_m	C_m	Definition of k_m
1	$C_m \left(\cosh \frac{k_m r}{R} - \cos \frac{k_m r}{R} \right) - \left(\sinh \frac{k_m r}{R} - \sin \frac{k_m r}{R} \right)$	$\frac{\sinh k_m - \sin k_m}{\cosh k_m - \cos k_m}$	$\cos k_m = \frac{1}{\cosh k_m}$
2	$C_m \left(\cosh \frac{k_m r}{R} + \cos \frac{k_m r}{R} \right) - \left(\sinh \frac{k_m r}{R} + \sin \frac{k_m r}{R} \right)$	$\frac{\sinh k_m + \sin k_m}{\cosh k_m + \cos k_m}$	$\frac{\sinh k_m + \sin k_m}{\cosh k_m + \cos k_m} = \frac{\cosh k_m + \cos k_m}{\sinh k_m - \sin k_m}$
3	$C_m \left(\cosh \frac{k_m r}{R} - \cos \frac{k_m r}{R} \right) - \left(\sinh \frac{k_m r}{R} - \sin \frac{k_m r}{R} \right)$	$\frac{\sinh k_m + \sin k_m}{\cosh k_m + \cos k_m}$	$\frac{\sinh k_m + \sin k_m}{\cosh k_m + \cos k_m} = \frac{\cosh k_m + \cos k_m}{\sinh k_m - \sin k_m}$

TAB. 5.1 – Definition of the normal modes corresponding to the three boudary conditions sketched in figure 5.4

Here r represents the distance of a point lying on one side of the section, to the initial contact point, called the apex. Shapes functions given in table 5.1 represent the structural modes of a simple plate with the corresponding boundary conditions. This description is sufficient in the case of a symmetric wedge. In fact, both sides can be considered as independent and seen as simple plates, forming a given angle with the free surface. However, this is not consistent with the principle of the generalized Wagner model. Its particularity is precisely to take under consideration the exact shape of the impacting section. Hence, if this way to proceed is valid in the present case, it must be kept in mind that it will not be the case for an other shape (such as cylinders for example). Once more, hypothesis of independent behaviour of the two sides is justified for BC 1, since each end is clamped. For BC 2 and BC 3 cases, this hypothesis is questionable but not completely unrealistic. It is used here since it provides simple mode shapes.

The aim of the present study is to show the efficiency of the algorithm developed in section 5.3. First, details on the convergence of the algorithm are given. Then, comparisons with a coupled linearized Wagner model [Scolan, 2002] are performed for various values of the thickness. The influence of the thickness, as well as those of the entry velocity, are investigated. Results are also given for wedges with a deadrise angle α larger than 20° . In fact, this value is not a limiting value anymore, unlike for the linearized approach.

5.5.1 Wedge clamped with boundary condition 1

The algorithm developped in section 5.3 is used here to solve the coupled generalized Wagner problem for an elastic and symmetric wedge with $R = 1$ m, clamped at both outer edges

and apex (BC 1). Results are compared to the coupled linearized Wagner model developed by [Scolan, 2002]. This wedge is made of a material with the following characteristics : $E = 21.10^{10}$ Pa, $\nu = 0.34$ and $\rho = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$. Velocity entry is assumed to remain equal to 4 m.s^{-1} .

Convergence of the algorithm

Tables 5.2 and 5.3 show the convergence on coefficients of decomposition (5.29) of $\frac{d\tau}{dt}$. These results are obtained for thickness $e = 0.004 \text{ m}$ and $e = 0.01 \text{ m}$ respectively. It should be noted that the more rigid the wedge, the faster the convergence. The more rigid the section, the less perturbed the solution, compared to the initial one. In fact, we should remind here that the solution used to initialize the computation, is precisely the solution of the rigid impact.

it./n	1	2	3	4	5
1	0.1220724566708	0.0000000000000	0.0000000000000	0.0000000000000	0.0000000000000
2	0.1859976089169	0.0684609371540	-0.0194676182261	-0.0327077235796	-0.0082739003667
3	0.1579100533075	0.0381686168657	-0.0047167392926	-0.0020788738699	0.0066954886925
4	0.1742105101406	0.0608220706959	-0.0010562433224	-0.0087803047651	0.0022070082887
5	0.1642939406156	0.0464120763566	-0.0044853393548	-0.0052471148358	0.0050191781397
6	0.1700566704934	0.0549323427024	-0.0022119670744	-0.0071727189175	0.0033661030987
7	0.1664938912162	0.0496073406763	-0.0037442729953	-0.0060773163022	0.0043624089751
8	0.1686443192454	0.0528331708136	-0.0027950722074	-0.0067235145617	0.0037629607504
9	0.1673185216236	0.0508365752124	-0.0034006907891	-0.0063465863404	0.0041227991721
10	0.1692924182067	0.0536444117261	-0.0024623817781	-0.0061437869291	0.0042507865289

TAB. 5.2 – Evolution of the 5 coefficients of $\frac{d\tau}{dt}$ during the 10 steps of the iterative process (e=4mm).

it./n	1	2	3	4	5
1	0.1220724566708	0.0000000000000	0.0000000000000	0.0000000000000	0.0000000000000
2	0.1220044264005	-0.0113965947961	-0.0148344952530	0.0024873642997	0.0069815566886
3	0.1215242248152	-0.0111004653822	-0.0145422648739	0.0001473286774	0.0046436979647
4	0.1216497428011	-0.0110264283033	-0.0143309898239	0.0006756746488	0.0051227962632
5	0.1216324159433	-0.0110512592194	-0.0143754689300	0.0005755350619	0.0050515470656
6	0.1216368382222	-0.0110431287589	-0.0143639692753	0.0005934679638	0.0050628410454

TAB. 5.3 – Evolution of the 5 coefficients of $\frac{d\tau}{dt}$ during the 6 steps of the iterative process (e=10mm).

In the simulations presented here, only 5 modes are used. This is very few but enough to represent the response of the structure since energy linked to the deformation is concentrated rapidly on the first mode only. Figure 5.6 shows the relative value of the first five modes compared to the first one for a thickness equal to 1 mm and 4 mm. It shows that the first two modes are not dominant at early stage of the penetration. However this period corresponds to a transitory phase, during which deformations are quasi negligible. For example, figure 5.9 shows that, when $e = 1 \text{ mm}$, the first mode weight is not negligible anymore, only for $c > 0.12R$. At this time, the fifth mode already vanishes, compared to the others. This phenomenon is more significant when thickness increases. If $e = 4 \text{ mm}$, only the first two modes are significant when the deformations begin to be non-negligible. The number of modes is restricted to 5 in order to obtain satisfactory CPU cost. Algorithm must be improved in order to obtain results with a larger number of mode in a reasonable computational time.

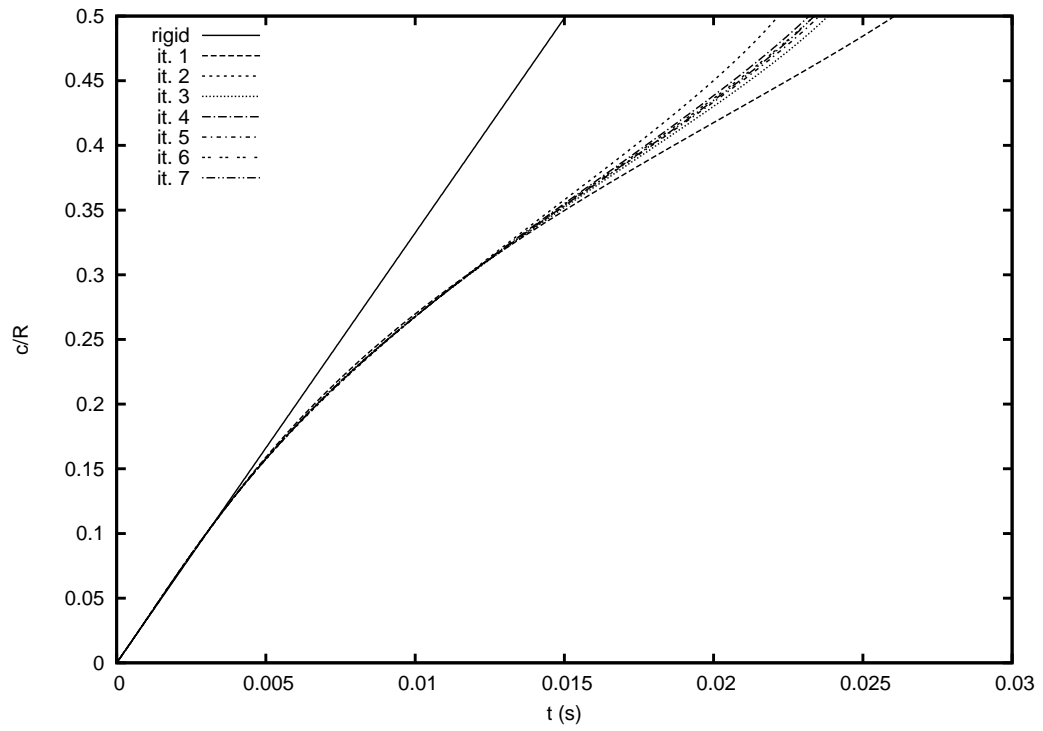
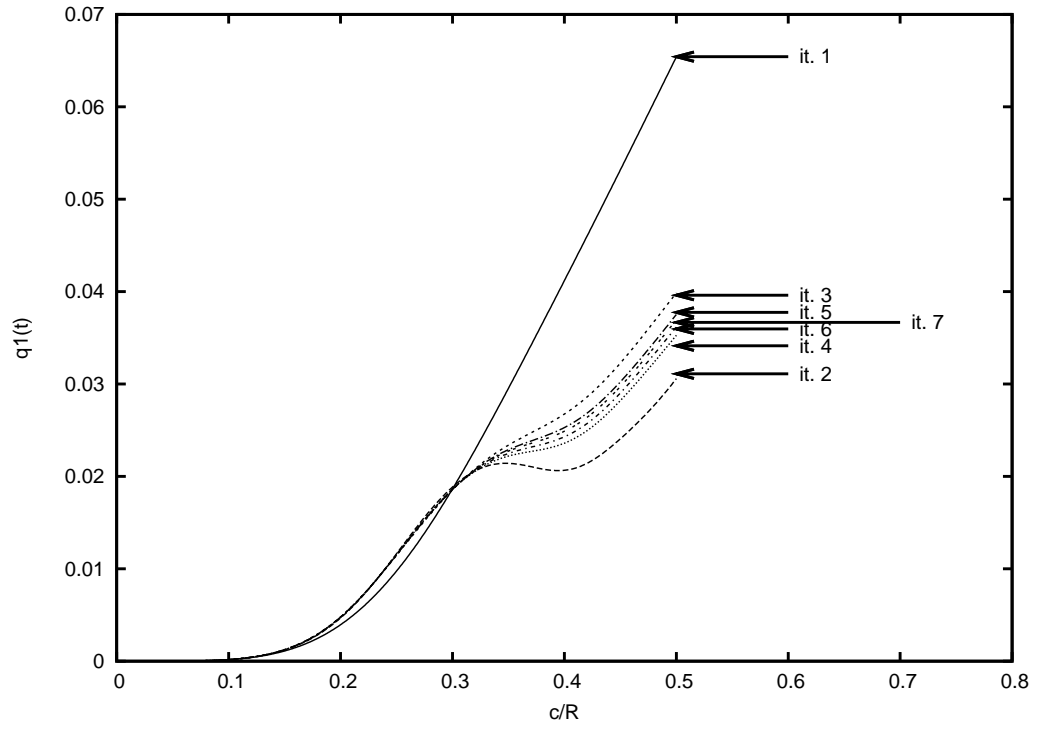


FIG. 5.5 – Successive predictions of first mode weight (top) and wetting correction (bottom) histories during the iterative process ($e=4$ mm, $V=4$ m.s⁻¹, $\alpha = 10^\circ$)

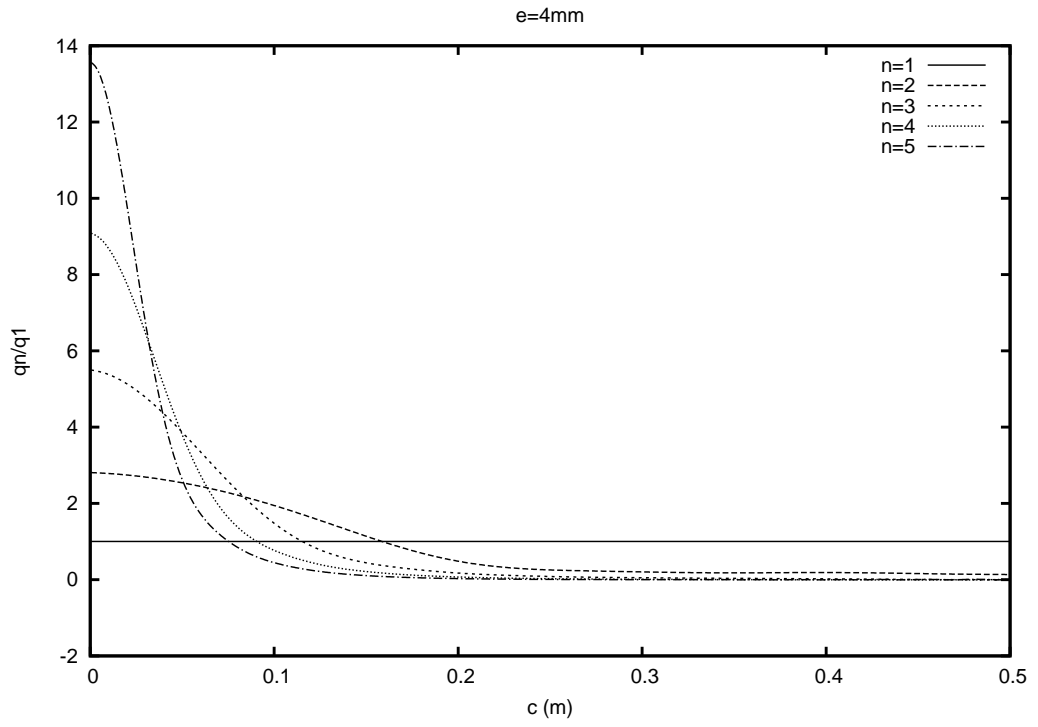
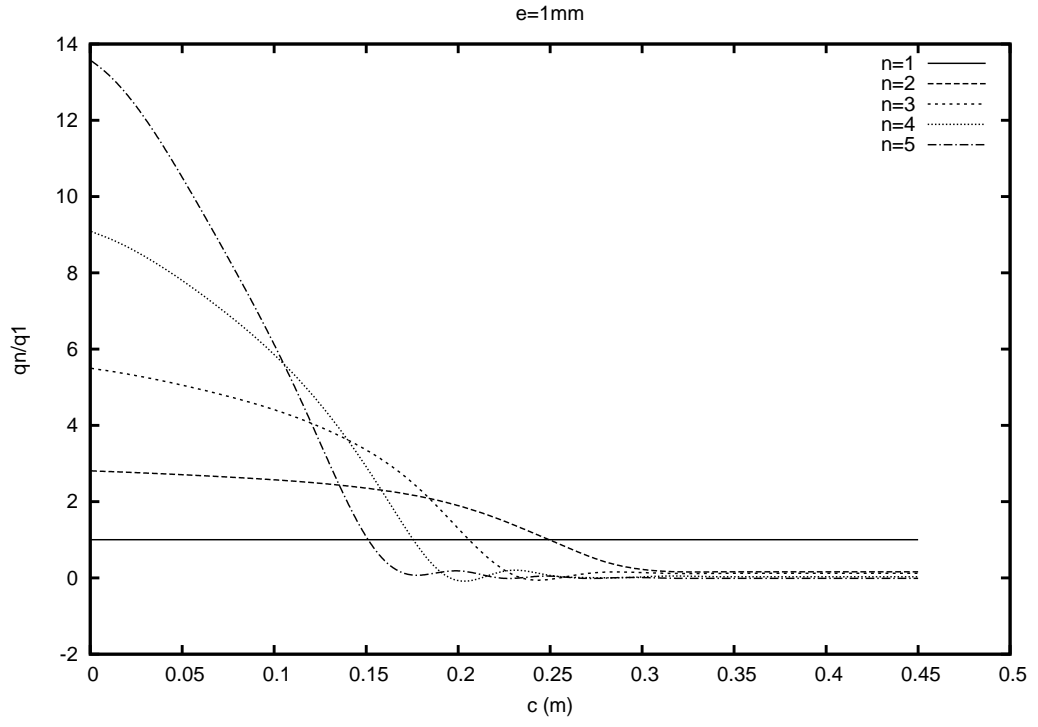


FIG. 5.6 – Relative variations of the first five modes, compared to the first one, when $e = 1$ mm (top) and $e = 4$ mm (bottom)

Limitations

- One has to keep in mind that the solution of the hydrodynamic problem requires some transformations of the fluid domain (see section 3.2 of chapter 3). The first one consists in continuing the problem, posed in the lower half plane into the upper half plane. To this end, the symmetric of the immersed part of the impacting section is used to turn the body into a closed form, denoted “double-body”. If the deformation is so important that the local deadrise angle becomes smaller than zero, this continuation yields a body that is not simply connected (see figure 5.7). In that case, it is not possible to find a suitable conformal mapping, which turns the fluid domain around the “double-body” into a domain around a flat plate. This case occurs for small thickness and large wetting correction. It hence reduces the duration of the impact that we can simulate. An other consequence is that such a model can not deal with cavity formation, in which air could be entrapped.

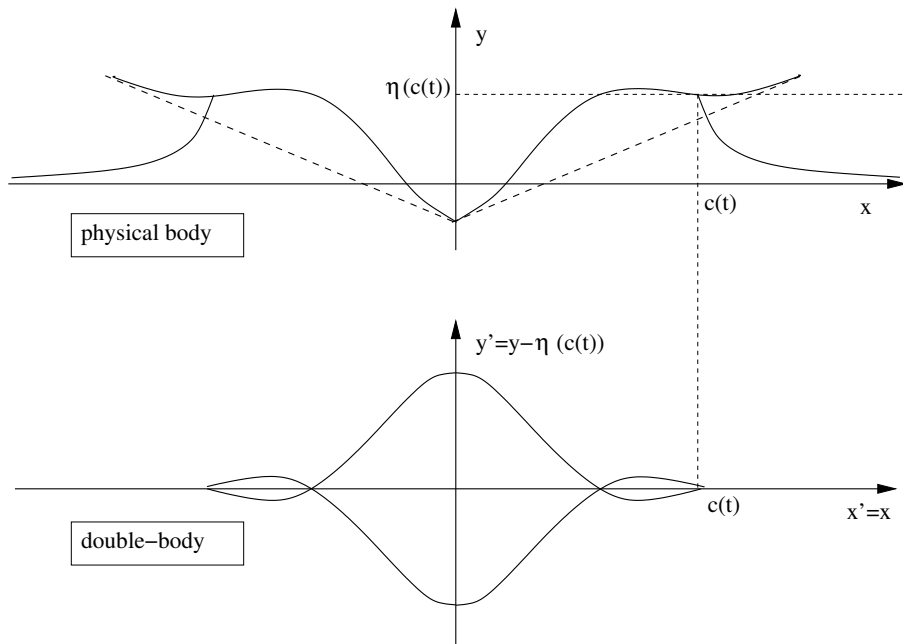


FIG. 5.7 – Illustration of one limitation of the hydroelastic model : When $dc/dt < 0$, the associated double-body is not simply connected anymore

- By using the rigid solution as a first evaluation of the solution, deformations are overestimated, as shown in figure 5.5. As a consequence, the algorithm can stop prematurely for the same reason than above. In order to avoid it, maximum value of the wetting correction is underestimated for the first iteration. It is increased at the second one to maximize the duration of simulation. In some sense, it means that the history of the unknowns is extrapolated during the last times of the simulation at iteration two. Since the maximum value of the wetting correction between first and second step are not too large, it does not yield instabilities in the computation.

Comparison to a linearized model

When convergence is obtained, the whole history of the system is available in terms of wetting corrections, deformations, loads... The 10 degrees wedge impacting water at 4 m.s^{-1} is considered and position of the contact point versus time is plotted in figure 5.8, for various values of the thickness (1, 1.5, 2, 4, 8 and 10 mm).

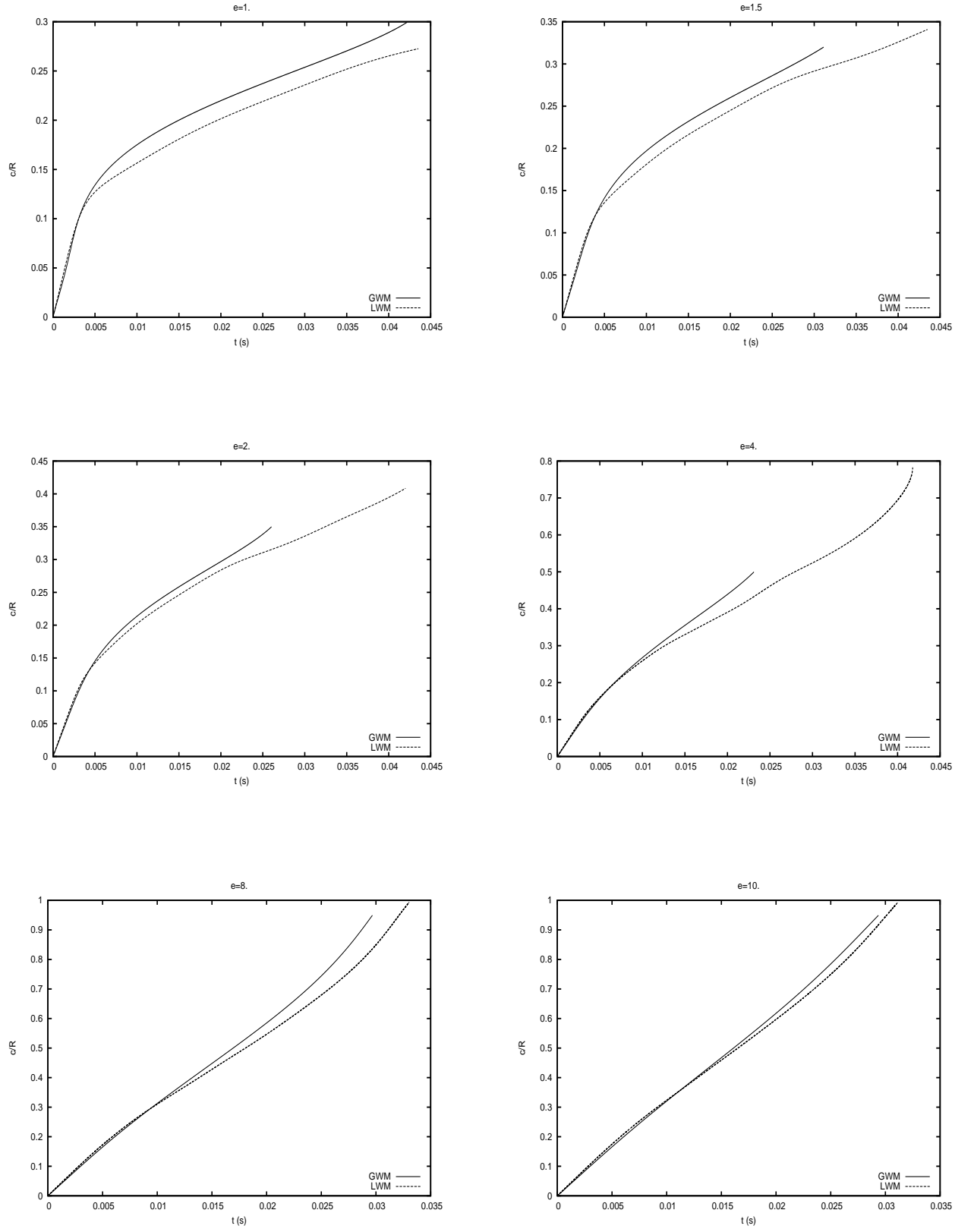


FIG. 5.8 – Position of the contact point during the hydroelastic impact predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner (LWM) model for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4m.s^{-1}$

In every case, the linearized theory underpredicts the wetting correction compared to the generalized theory. It is interesting since in a rigid case, it is the contrary. That is understandable since, as shown in figures 5.9 and 5.10, the linearized Wagner model overestimates the deformations compared to the generalized Wagner model. As a consequence, the local deadrise angle predicted in the first theory is sharper close to the apex. Hence, the wetting correction grows up more slowly. The thicker the section, the smaller the discrepancy between the two models. The discrepancy remains small however. The maximum is reached for $e = 1$ mm with a discrepancy of 20% at the end of the simulation (see figure 5.8). When the thickness increases, deformation decreases and the behaviour tends to a rigid one, *i.e.* to a linear variation in time of the wetting correction.

For the same values of the thickness, figure 5.9 shows the history of the first mode weights during the impact, compared to the results provided by the coupled linearized Wagner model [Scolan, 2002]. In the generalized Wagner model, the first one begins to grow up faster than in the linearized one. However, this phenomenon does not continue and, for larger times, the weights (and, as a consequence, the deformations) predicted by the linearized model are larger. This is evident for large thickness especially. If $e = 10$ mm and for complete immersion ($c(t) = R$), the weight of the first mode in the linearized model is about twice compared to the generalized model, in spite of a very similar prediction in terms of wetting correction (see figure 5.8). This can be linked to the property of the linearized Wagner model, that is known to overestimate the hydrodynamic loads.

The history of the second mode weight, plotted in figure 5.10, is less perturbed in the generalized theory. However, the accuracy is better than for the first mode. Orders of magnitude are the same and global variations are in adequation.

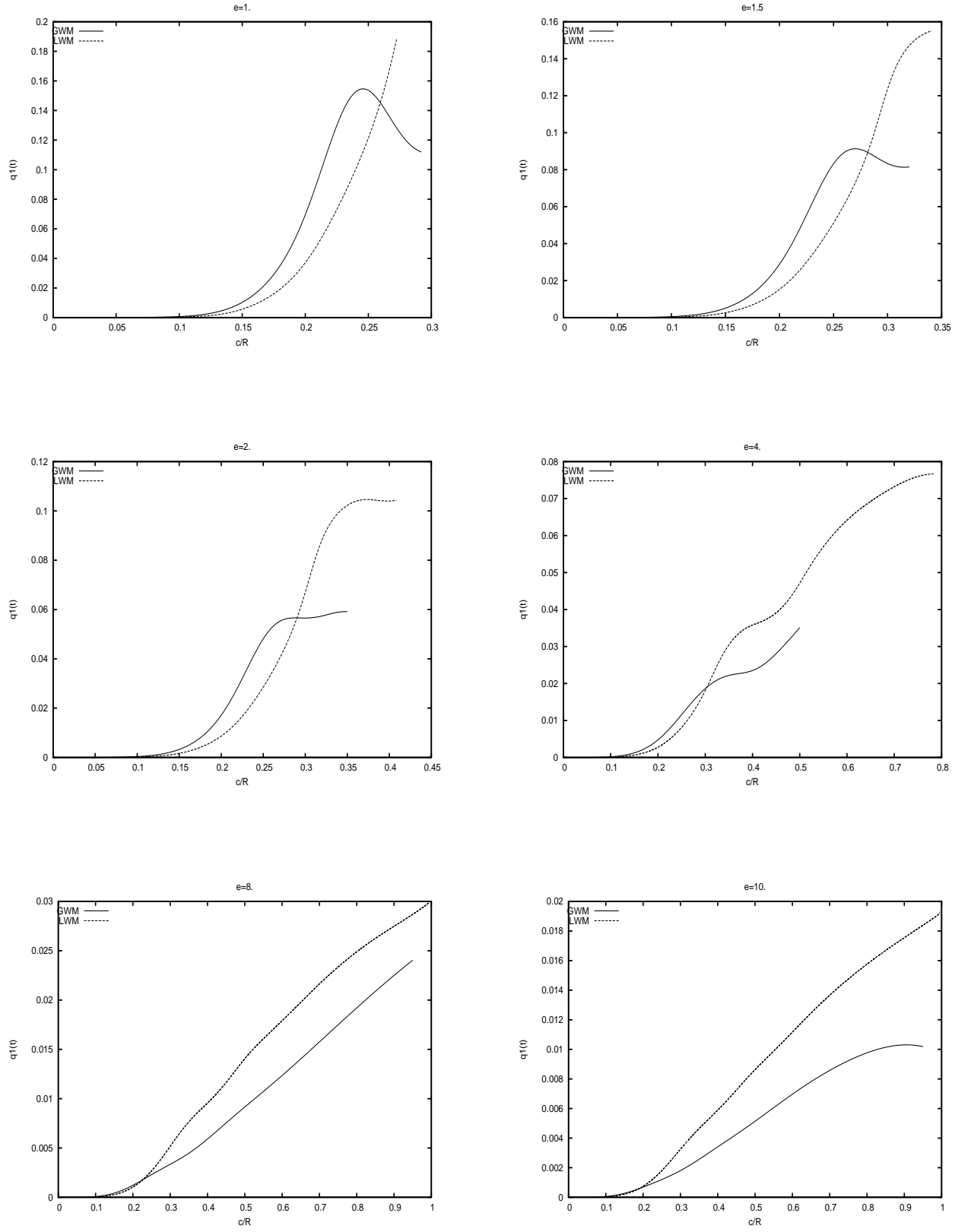


FIG. 5.9 – History of the first mode of deformation predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner model (LWM) for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4m.s^{-1}$

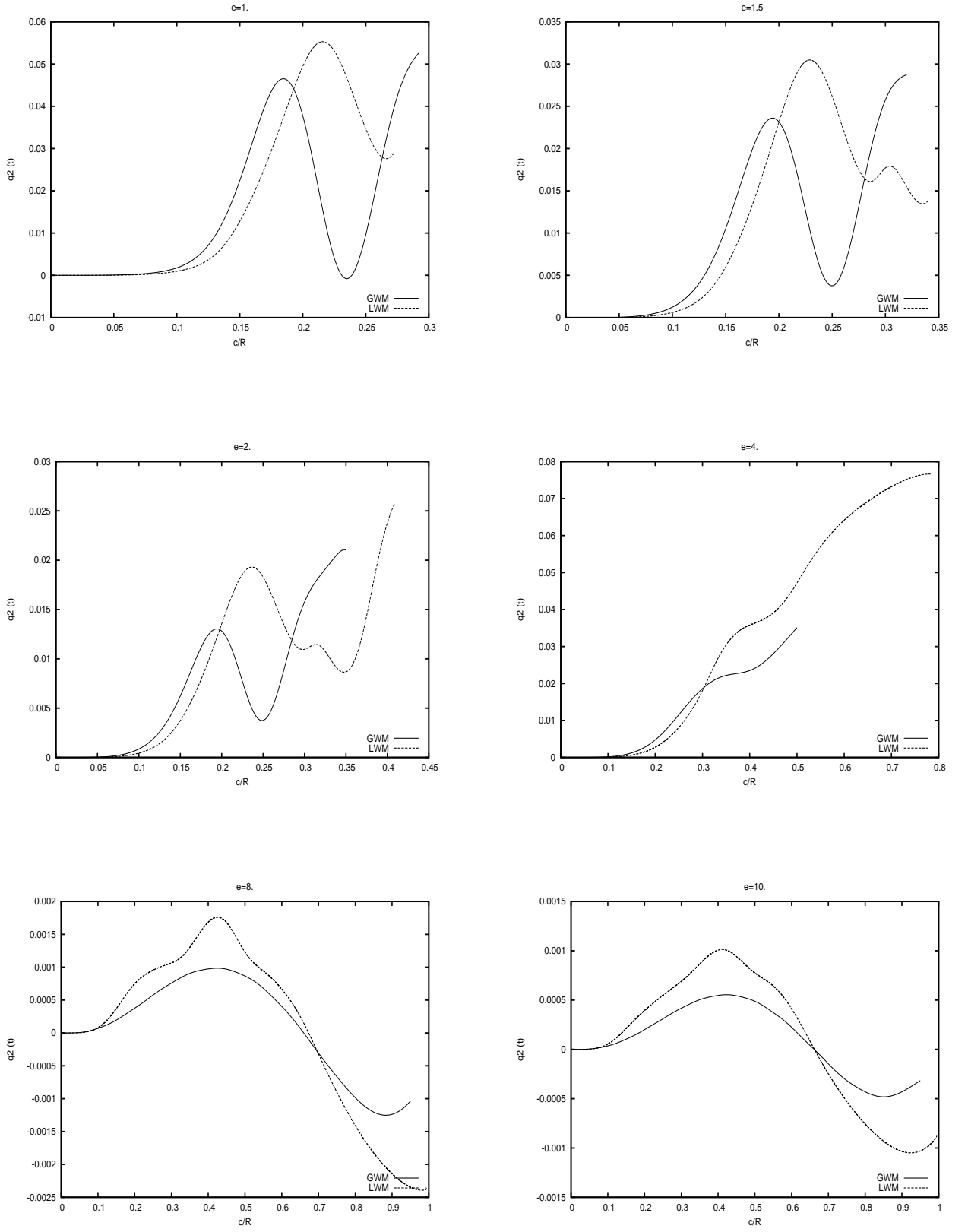


FIG. 5.10 – History of the second mode of deformation predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner model (LWM) for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4m.s^{-1}$

5.5.2 Influence of the thickness

The same configuration ($\alpha = 10^\circ$, $V = 4 \text{ m.s}^{-1}$, BC 1) is used here, and thickness is successively set to 1, 1.5, 1.75, 2, 4, 6, 8 and 10 mm. Figure 5.11 shows the influence of the thickness through the variation of expansion velocity of the wetted surface $\frac{dc}{dt}$. Its curve presents two possible behaviours, depending on the fact that e is smaller or larger than 2 mm.

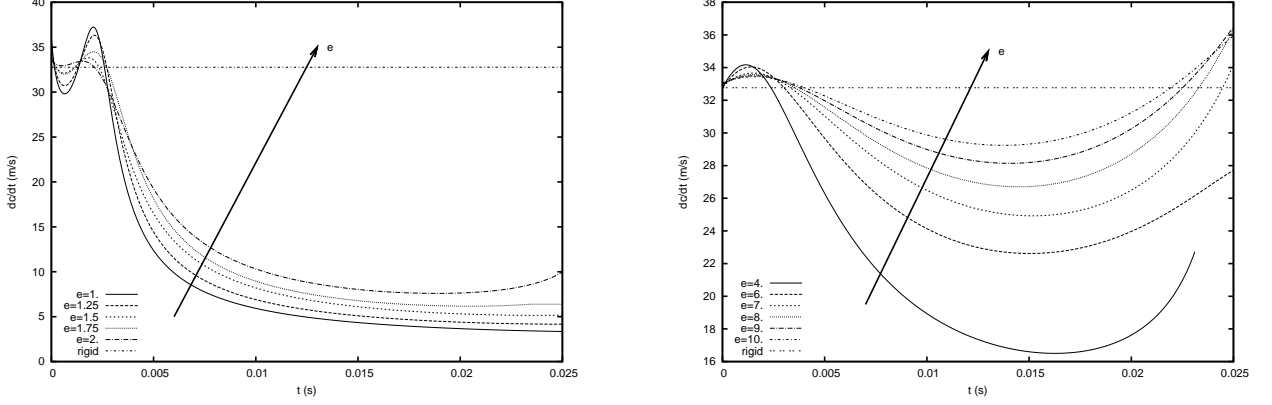


FIG. 5.11 – Evolution of expansion velocity $\frac{dc}{dt}$ of the wetted surface with the thickness of the section. Two different behaviours are observed, depending if the thickness e is smaller than 2 mm (left) or larger (right). Arrow shows the increasing direction of the thickness

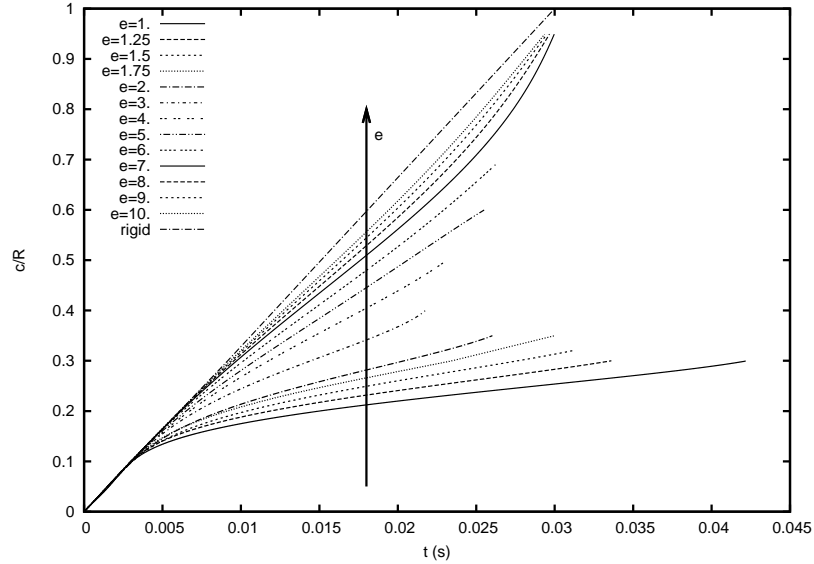


FIG. 5.12 – Evolution of the contact point $c(t)$ with the thickness of the section ($\alpha = 10^\circ$). Arrow shows the increasing direction of the thickness.

If $e < 2$ mm, $\frac{dc}{dt}$ first decreases during a short period, before to increase during a comparable duration, and to decrease again. If $e > 2$ mm, $\frac{dc}{dt}$ increases before to decrease. This difference

of behaviour can only be explained by the fact that the intersection point $c(t)$ can move faster, or not, than the point where the deflection is maximum. The thickness is one of the parameter that can be used to control relative velocity between these two points, as well as the deadrise angle.

Position of the contact point is plotted in figure 5.12. The first mode weight is plotted in figure 5.13. Like for $\frac{dc}{dt}$, two behaviours are observed for $q_1(t)$, depending on the relative value of e , with regards to 2 mm.

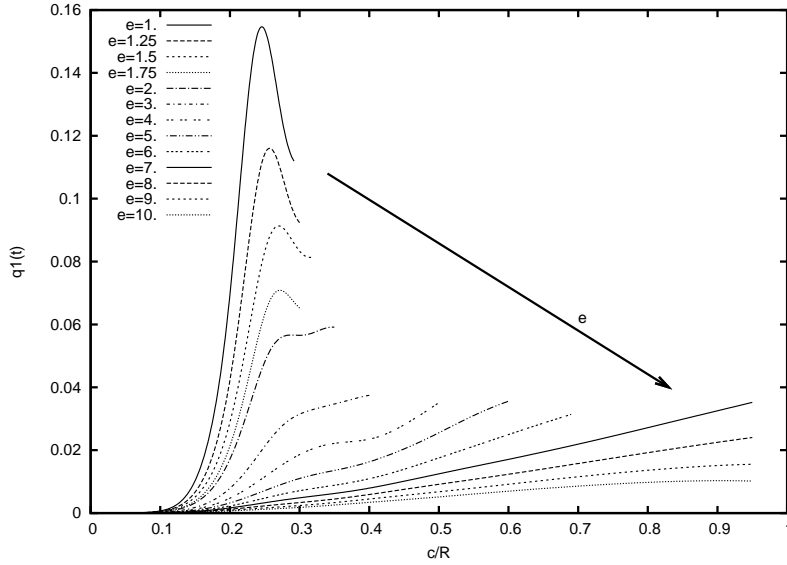


FIG. 5.13 – Evolution of the first mode weight $q_1(t)$, with the thickness of the section. Arrow shows the increasing direction of the thickness

5.5.3 Influence of the deadrise angle

In this section, the thickness is set to 4 mm. The deadrise angle varies from 5 to 40 degrees. The aim of this part is to show how the behaviour of the system varies with the deadrise angle and that the limitation of the linearized Wagner model in terms of deadrise angle (that should be smaller than 20 degrees) is not a problem anylonger in a generalized approach. Expansion velocity of the wetting surface is plotted in figure 5.14 (right), as well as the time position of the contact point $c(t)$. Like for the thickness, two kinds of behaviour can be highlighted, depending on the value of the deadrise angle and if it is smaller or larger than 10 degrees. In figure 5.14, the behaviour described in section 5.5.2 is particularly remarkable. In some sense, deadrise angle and thickness seem to play a similar role. It must be noted however that the deadrise angle has an effect on the hydrodynamic loads, while the thickness modifies the rigidity of the structure and, as a consequence, its answer to the hydrodynamic loads.

Figure 5.15 shows the deflection history at two points located respectively at $x = R/3$ and $x = 2R/3$. results by the present model are compared to those by the linearized Wagner one. For deadrise angle smaller than 15 degrees, orders of magnitude are the same in the two models, especially when the penetration depth remains small (up to $0.2R$). If the deadrise angle is larger than 15 degrees, discrepancy between the two solutions becomes larger but variations

can be easily correlated. The instant when deflection at point $x = 2R/3$ becomes larger than at point $x = R/3$ occurs earlier in the present approach, than in the linearized one.

The instant when deflection at a given point is maximum differs from the instant when this point corresponds to the contact point between free and wetted surfaces. That illustrates the fact that the contact point, and the point where deflection is maximum are moving along the section with different velocities. This point was already mentioned in section 5.5.2.

As expected, the loads and as a consequence the deformations, are smaller when the deadrise angle grows up.

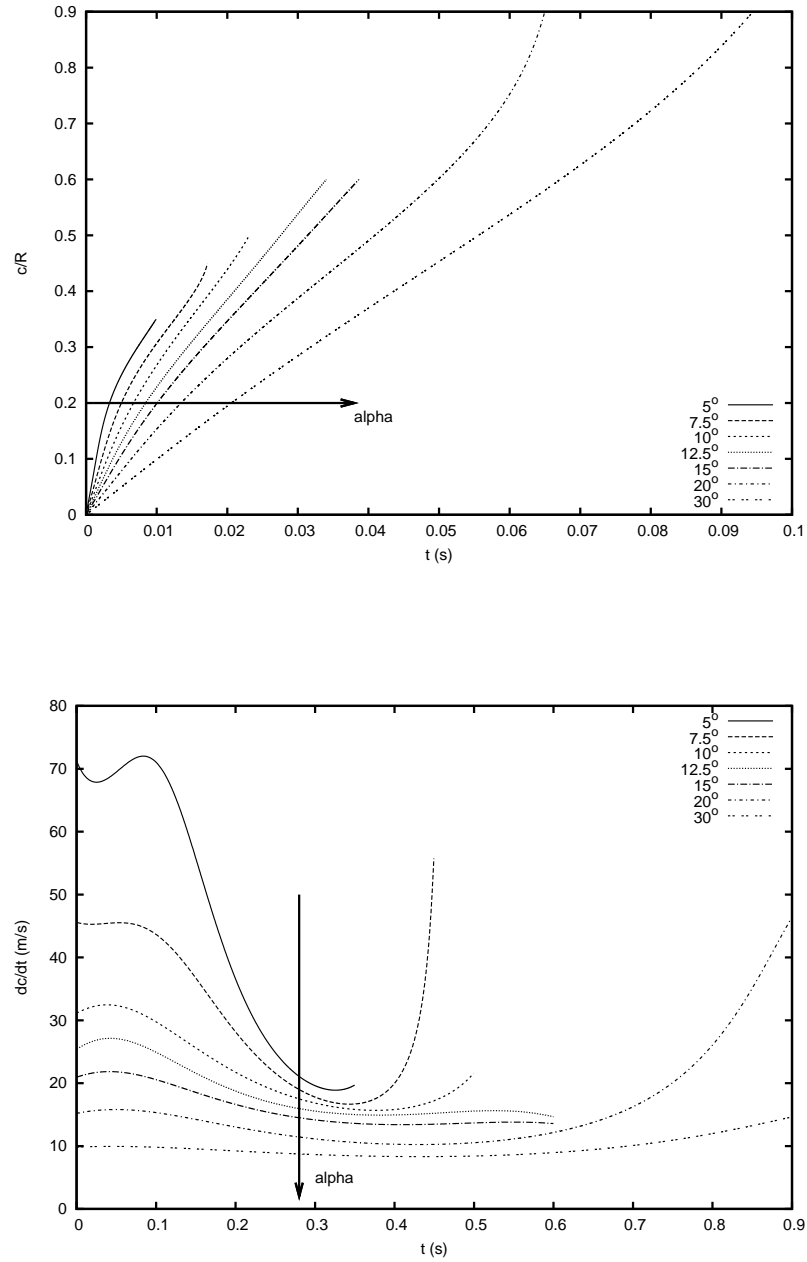


FIG. 5.14 – Instantaneous position of the contact point $c(t)$ (top) and expansion velocity of the wetted surface dc/dt (bottom) for a deadrise angle varying between 5° and 40° . Arrow shows the direction in which α increases

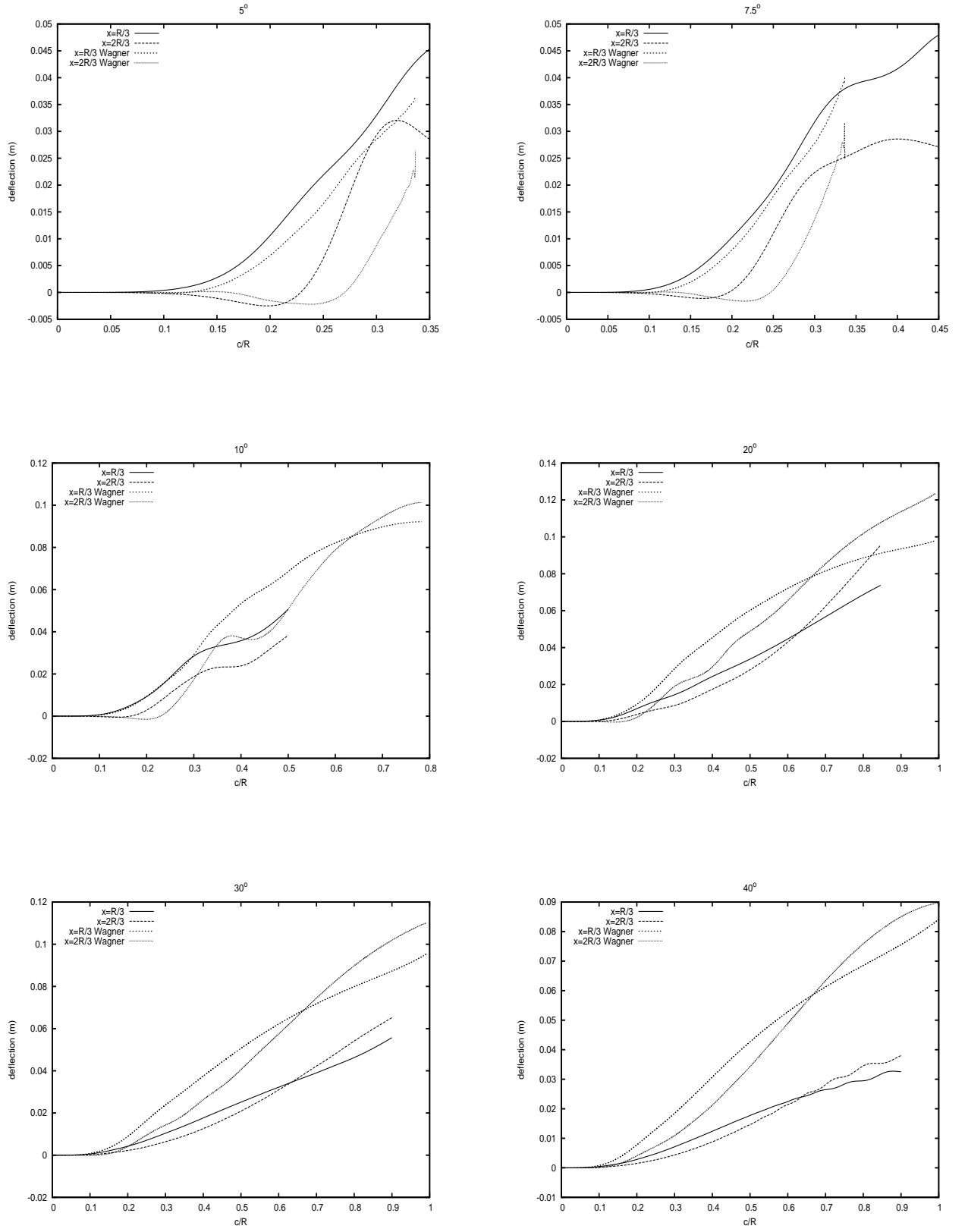


FIG. 5.15 – History of the deflection at two points located at $x = R/3$ and $x = 2R/3$ predicted by the present model and the linearized Wagner model

5.5.4 Influence of the impact velocity

We focus here on the influence of the entry velocity of the section.

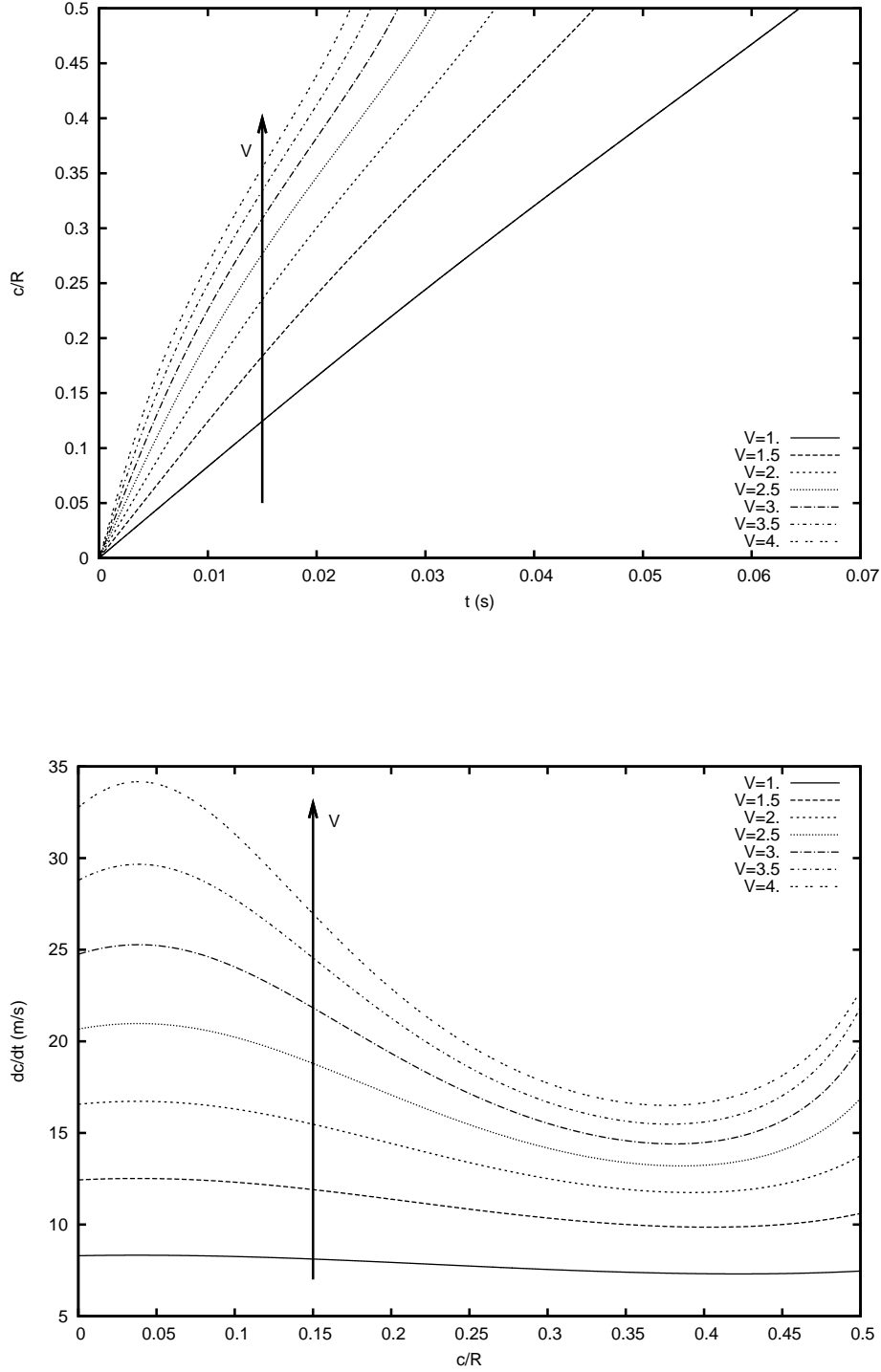


FIG. 5.16 – History of the contact point position $c(t)$ (top) as well as expansion velocity of the wetted surface (bottom), in function of the entry velocity. Arrow shows the increasing direction of the velocity

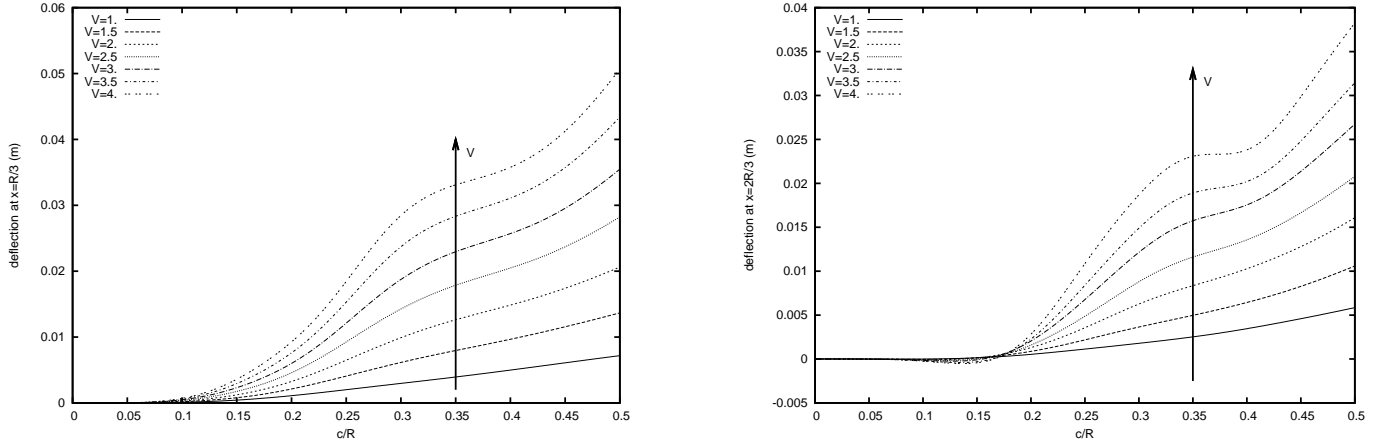


FIG. 5.17 – Time history of deflection at points $x = R/3$ (left) and $x = 2R/3$ (right), as a function of the entry velocity. Arrow shows the increasing direction of the velocity. Deadrise angle is set to 10 degrees and the thickness is set to 4 mm

Figure 5.16 shows the influence of the behaviour of the contact point in terms of time position $c(t)$ and velocity dc/dt . Figure 5.17 shows the influence of the entry velocity on the deflection at two points located along the section ($x = R/3$ and $x = 2R/3$). According to these results, influence of the entry velocity V is not very important in the problem considered here. In fact, in terms of prediction of the wetting corrections (figure 5.16), but also in terms of deflection (figure 5.17), the system has the same behaviour. Only the amplitude is affected. The poor influence of the velocity entry as parameter is due to the fact that, in the present study, it remains constant during the whole penetration. In a variable velocity case, effects of the initial velocity are detailed in [Scolan, 2002].

It can be noted that, at the early stage of the impact ($c < 0.16R$), deflection at $x = 2R/3$ takes negative values. This is due to the fact that during this period, the first mode is not the dominant one. In that precise case, it is the second one that is dominant. As shown previously, in the range of thickness chosen for this study, the third mode never dominates during a sufficient period, to reach significant values.

5.5.5 Influence of the deformations on the loads

As shown above, influence of the deformations on wetting corrections history is evident. Prediction of the loads is greatly affected in the same way. In figure 5.19, we focus on the cases $e = 4$ mm and $e = 10$ mm. Distribution of pressure is plotted at 3 different instants. The distribution of pressure acting on a rigid wedge is plotted as well. It shows that values of the pressure are considerably affected by the deformations. In a first time, the pressure is smallest than in the rigid case. But when $c(t)$ is about $0.75R$, it is the contrary. This is due to the fact that at first times of penetration, the local deadrise angle at the contact point becomes larger than the initial deadrise angle (10 degrees in the present study). On the contrary, when the last third quarter begins to be immersed, the deadrise angle is smaller than 10 degrees. As a consequence, local loads are more important in this area. Discrepancy between rigid and elastic cases can be very important. In the cases presented here, a factor 4 is obtained when $c(t) = 0.3R$ and $e = 4$ mm.

Figure 5.18 shows the variation of the maximum pressure in the two cases $e = 4$ mm and $e = 10$ mm.

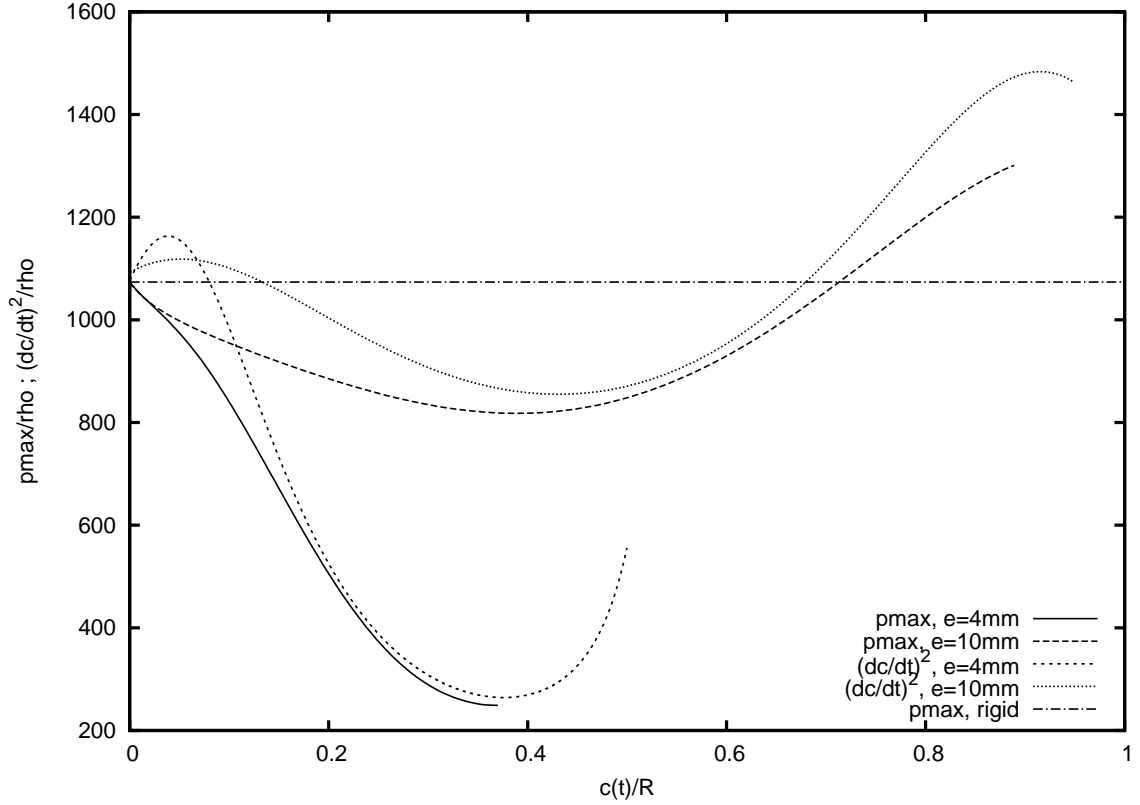


FIG. 5.18 – Maximum of pressure acting on the section and its approximation $(dc/dt)^2$. Important discrepancies compared to the rigid case are highlighted

The two phases, described in [Scolan, 2002] are observed here too. First, both $\frac{dc}{dt}$ and the maximum of pressure decrease until they reach a minimum. From this point we can consider that the behaviour of the structure is completely due to the first mode. Then, $\frac{dc}{dt}$ and p_{max} increase till complete immersion or till they reach a local maximum.

At each time, maximum of pressure can be approximated by the square of dc/dt , the expansion velocity of the wetted surface. This approximation is plotted as well in figure 5.18. Like in the rigid case (see chapter 4), maximum of pressure is overpredicted by this approximation that remains satisfactory however. A remarkable difference can be noted just after the first instant of contact. The expansion velocity of the wetted surface is briefly increasing. Then, it decreases, whereas the maximum pressure decreases immediately. This difference of behaviour is still unclear.

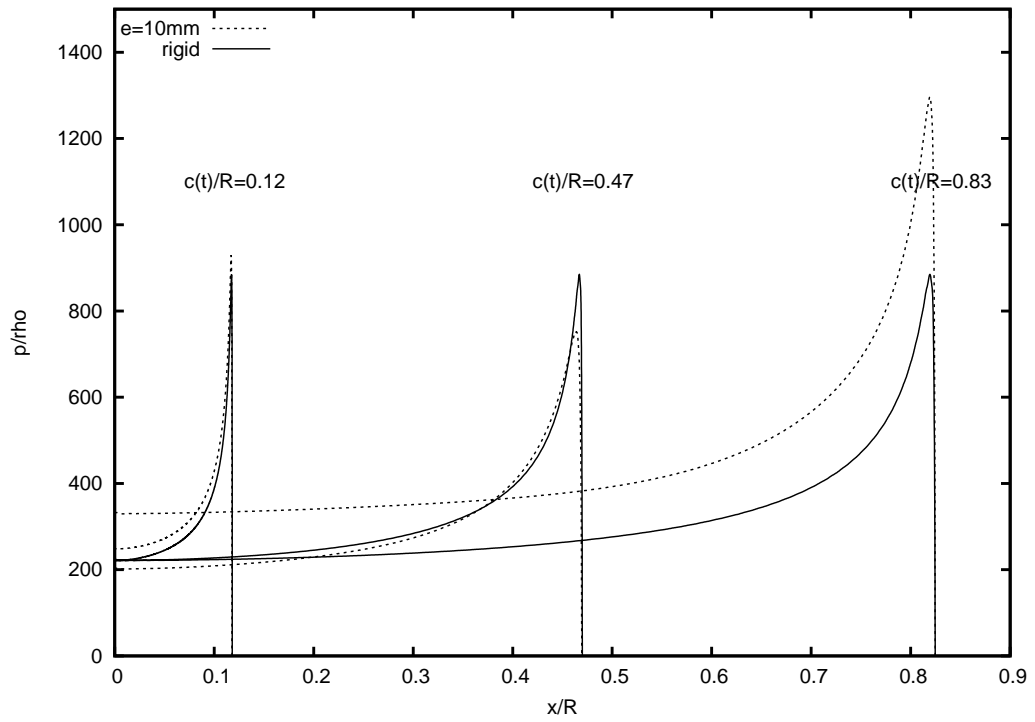
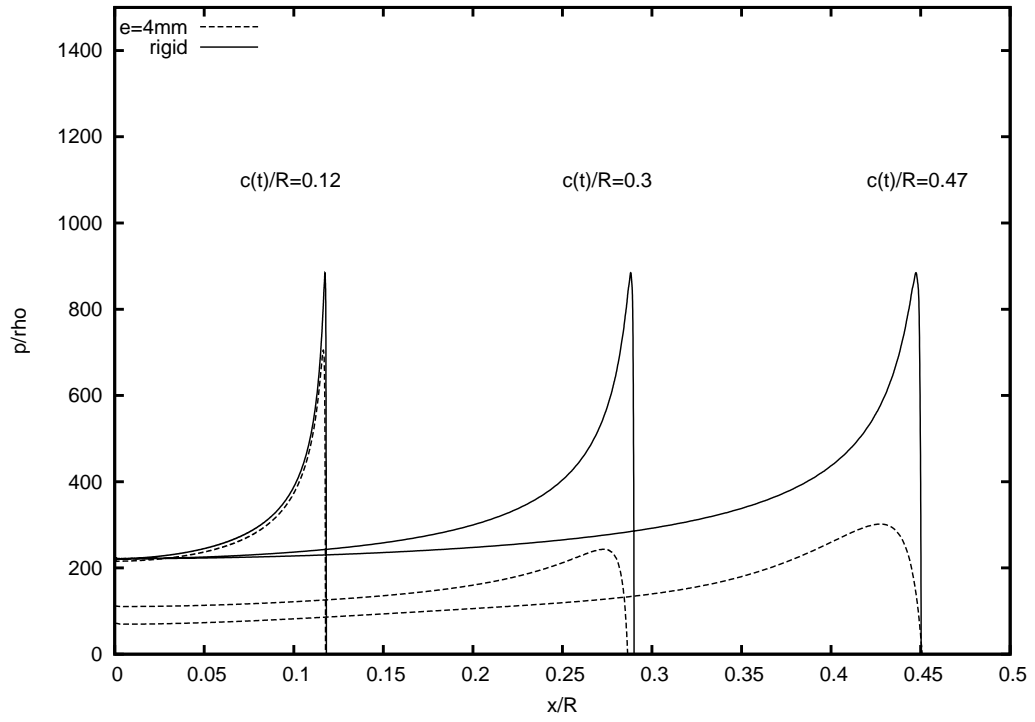


FIG. 5.19 – Instantaneous pressure distribution at two instants of the impact in the deformable case compared to the rigid solution, for a thickness equal to 4 mm (top) and 10 mm (bottom)

In the present structural model, the stress tensor has only one component that is different from zero. Stress in the wedge can hence be written $\sigma = \sigma_{,rr} = -w_{,rr}$. Figure 5.20 shows a comparison between maximum values of the stress predicted by the present generalized model and by the linearized models of [Khabakhpasheva and Korobkin, 2003]. This model is based on the linearized Wagner approach. Two solutions are derived, respectively noted F and A1. Solution F denotes the solution of the fully coupled model while solution A1 results of a simplified model in which the added mass matrix $S(c)$ is approximated by $c^2 S(1)$ (see [Khabakhpasheva and Korobkin, 2003]). It seems normal to obtain smaller stresses in the generalized model and it is the case while e is bigger than 0.007 m. For smaller values it is different and we should go more inside this phenomenon.

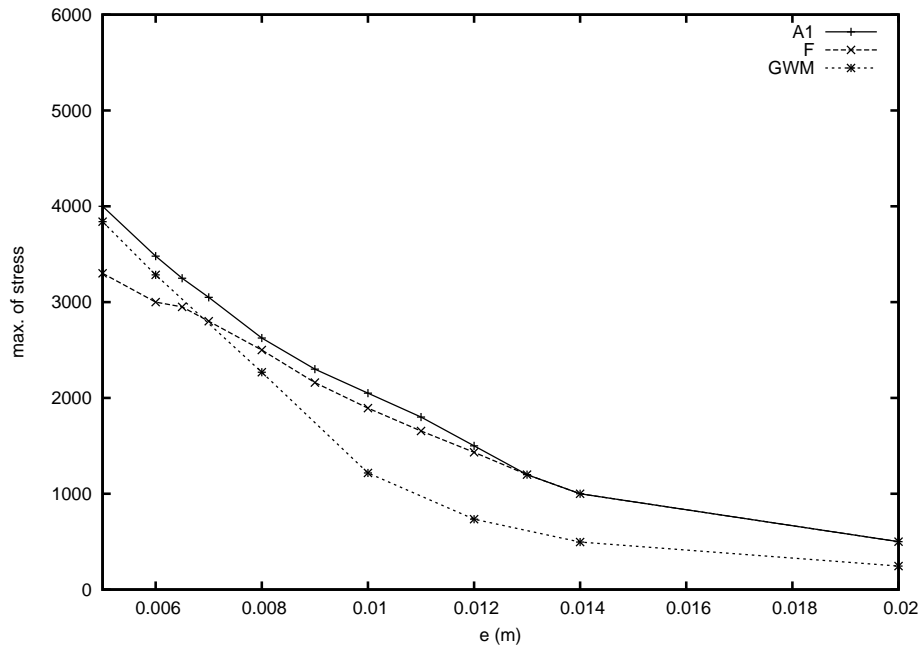


FIG. 5.20 – Maximum of the stress versus thickness. Results for the fully coupled linearized Wagner model (F) and for the simplified linearized Wagner model (A1) are compared to the generalized Wagner model (GWM).

5.5.6 Extension to the problems with BC 2 and 3

The present model is now applied to the hydroelastic impact problem of a wedge with BC 2 and 3. History of the wetting correction is plotted in figure 5.21 (left) for the three different boundary conditions of table 5.1. The deadrise angle β is set to 10° and the thickness $e = 10$ mm. At the first times of the impact, problems with BC 1 and 3 give very similar results. In fact, while $c(t)$ is smaller than a given value, the structure seen by the fluid is very closed in the two cases. The smaller the thickness, the smaller the limiting value of $c(t)$. On the contrary, the use of BC 2 yields a very different evolution of the system. This is clearly evident in figure 5.21 and 5.22.

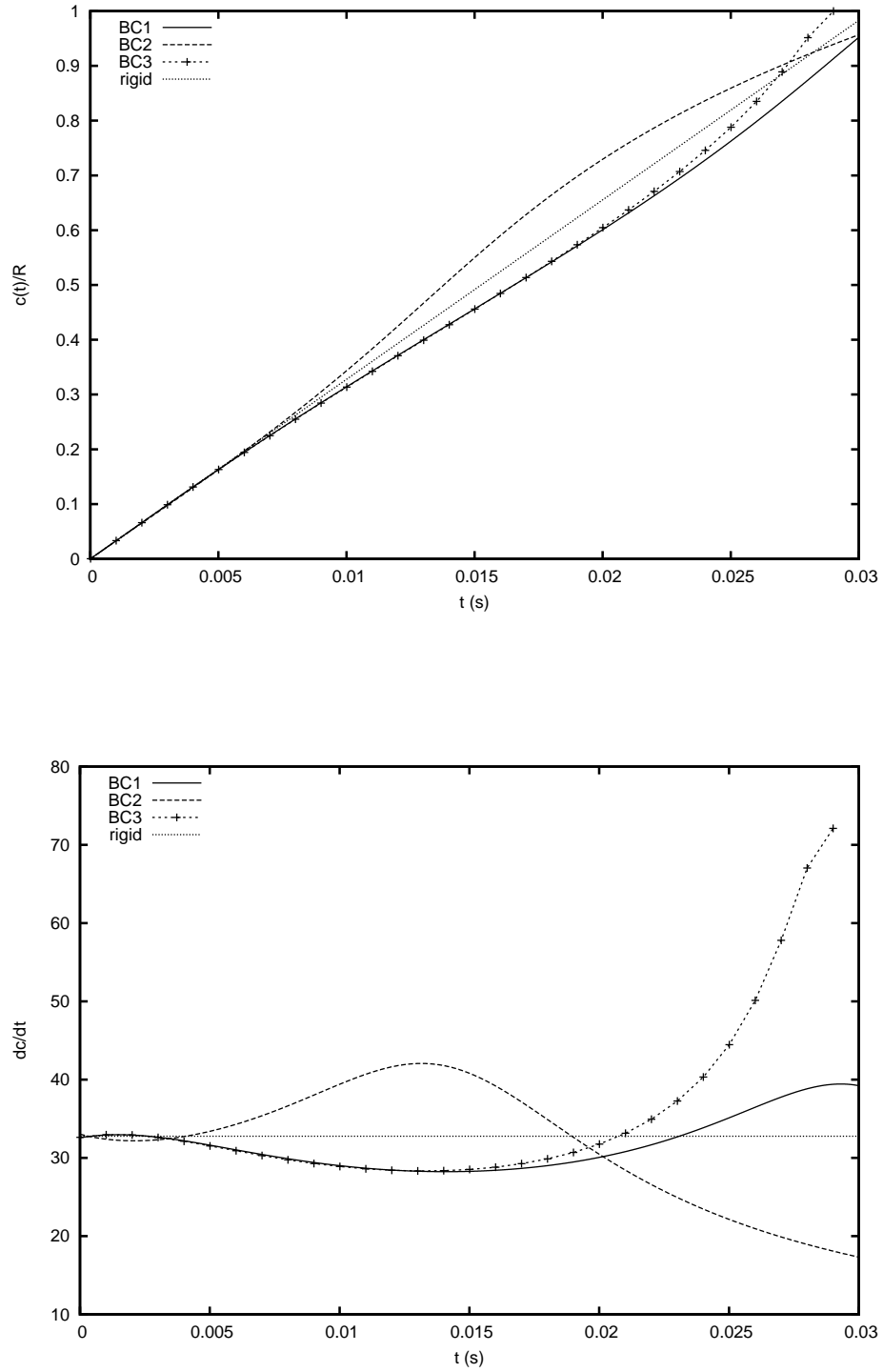


FIG. 5.21 – Histories of the wetting correction (top) and of the expansion velocity of the wetting surface (bottom) for a wedge with $e = 10$ mm and for the three different boundary conditions presented in table 5.1.

In figure 5.22, the pressure distribution acting on the impacting structure is plotted at three times (left). The corresponding deformed structure is represented as well (right). The maximum of pressure p_{max} is first decreasing in case 1 and 3 and increasing at the end of the penetration.

For the case 2, it is the contrary. The smaller the local deadrise angle, the higher the pressure and the expansion velocity of the wetted surface in this area. Since the deformation are locally modifying the deadrise angle, they have an effect on the variation of dc/dt , as shown in figure 5.21. Since the variation on dc/dt can be correlated to those of p_{max} , the results in terms of pressure are not surprising.

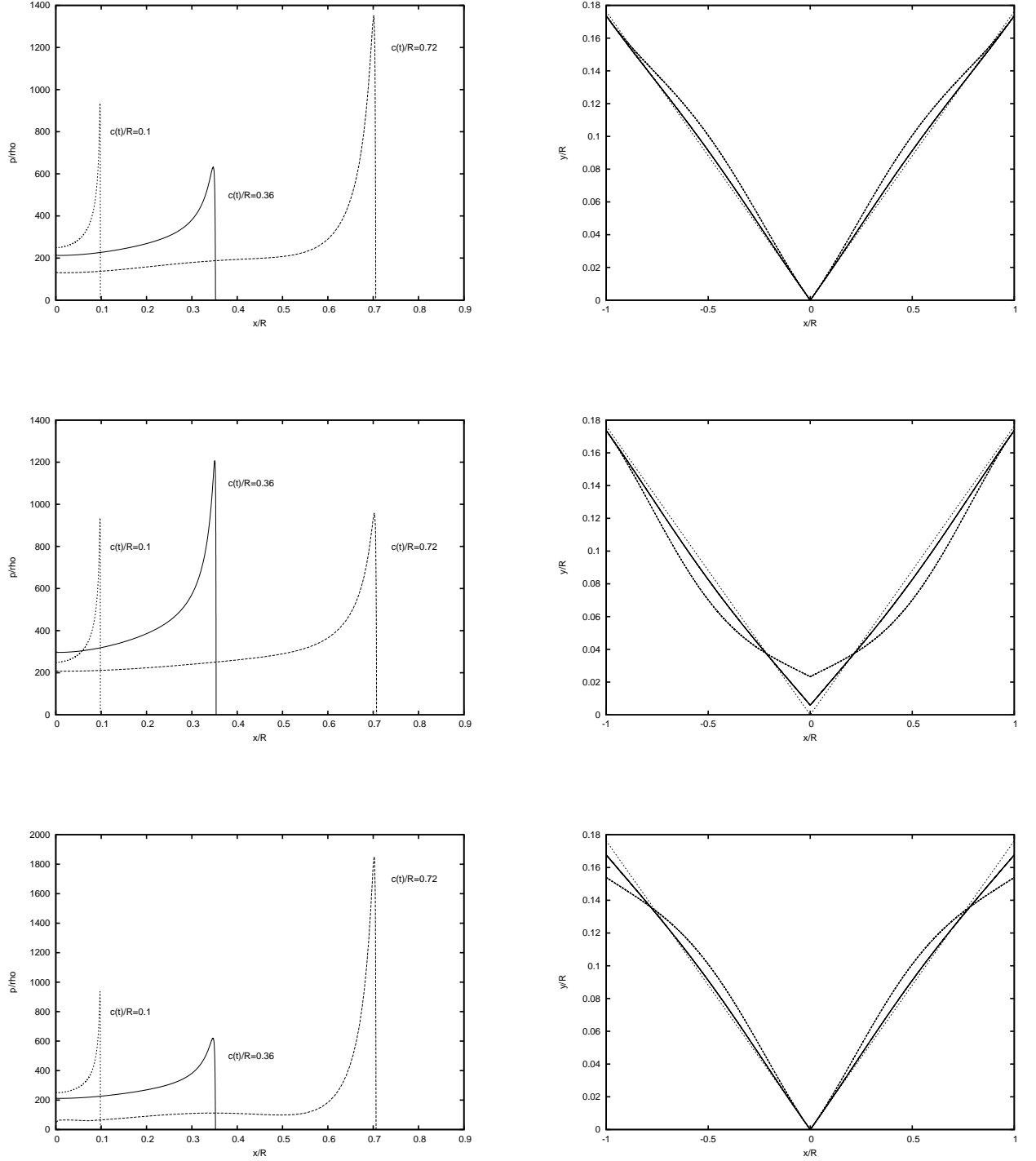


FIG. 5.22 – Pressure distribution at three instants of penetration (left). Corresponding instantaneous shapes of the impacting body are represented (right). From top to bottom : BC1, BC2, BC3.

5.6 Conclusions

The present study shows that it is possible to couple the generalized Wagner model with an elastic model for the impacting structure. Applications in the simple case of an elastic wedge, show that the present algorithm provides realistic prediction of the system behaviour. Simulation duration is limited by the fact that the algorithm fails to predict evolution of the system if the local slope at the contact point becomes negative. However, significant comparison have been performed with the coupled linearized Wagner model. The influence of the thickness of the section has been investigated, as well as those of the impact velocity. As previously mentioned by [Scolan, 2002], the thickness plays an important role since it governs the rigidity of the structure.

The interest of using a generalized Wagner model instead of a linearized one lies in the fact that it makes theoretically possible to deal with more various shapes, but also to compute the loads in a more realistic way. In practice, only wedges has been considered. More efforts are needed to deal with different shapes such as cylinders. For example, large values of the deadrise angle have been considered. However, linearized Wagner model is very interesting in terms of computational cost. The present generalized Wagner method must be optimized in order to be competitive compared to the linearized Wagner approach in terms of computational cost.

The importance of taking deformation into account to properly compute local loads on a deformable body is underlined. In fact, if a deformable body is assumed to be rigid during dimensionning loads computation, these loads will sometime be overestimated, and sometime underestimated, depending mainly on the variation of the slope at the contact point.

It can be interesting in further developments, to extend the present model to more complicated shape. As a first step, the case of a deformable cylinder is interesting and has already been investigated by [Sun, 2007] with a boundary element method.

Chapitre 6

Experimental study : hydroelastic impact of an elastic sphere

6.1 Introduction

Many experimental studies dealing with hydroelastic impact of deformable structures onto water exist. However, considered structure presents the more often an important rigidity. It is the case for example in [Donguy, 2002] where hydroelastic impacts of wedges made of aluminium are studied. Up to our knowledge, the litterature is very poor in terms of experimental study of inflated structure impact. The aims of the present experimental study are :

- to highlight the difficulties encountered during such a study
- to quantify the importance of fluid structure interaction during hydroelastic impact of an inflated structure,
- to understand the occuring phenomena,
- to obtain data in order to validate numerical models,
- to identify the relevant parameters of the problem.

To this end, the following choices are done. First, a space hopper is used. In fact, such a ball presents a good compromise between weight and deformability. Once more, it presents a convenient and academic spherical shape. Kinematics of this ball during its water entry is recorded thanks to a fast camera and a contour detection code is used to obtain the history of the deformation from the recorded images.

6.2 Experimental setup

6.2.1 Facilities

The present experimental study takes place in the flume of Ecole Centrale de Marseille. Free drop tests are performed. The inflated ball falls over a height h onto a liquid free surface, initially at rest. The experimental setup is schematized in figure 6.1. It shows the flume (bottom, right) in which the drop tests are performed, the ball (top, right) and the camera (center, right) used to record the final stage of the drop in air and the whole fluid-structure interaction up to a possible rebound. This camera is a fast camera Phantom v5.0 with the following characteristics :

- image resolution : 1024×1024 pixels up to 4800 frames per second (fps)
- internal memory : 1024 Mbytes
- recording rates : up to 10000 fps

– interface to PC : Firewire

In practice the high vibration frequency of the membrane imply that we need to set the camera up to 1900 frames per second. No higher frequency of acquisition is available since the size of the window required to observe the phenomenon limits it to this upper value.

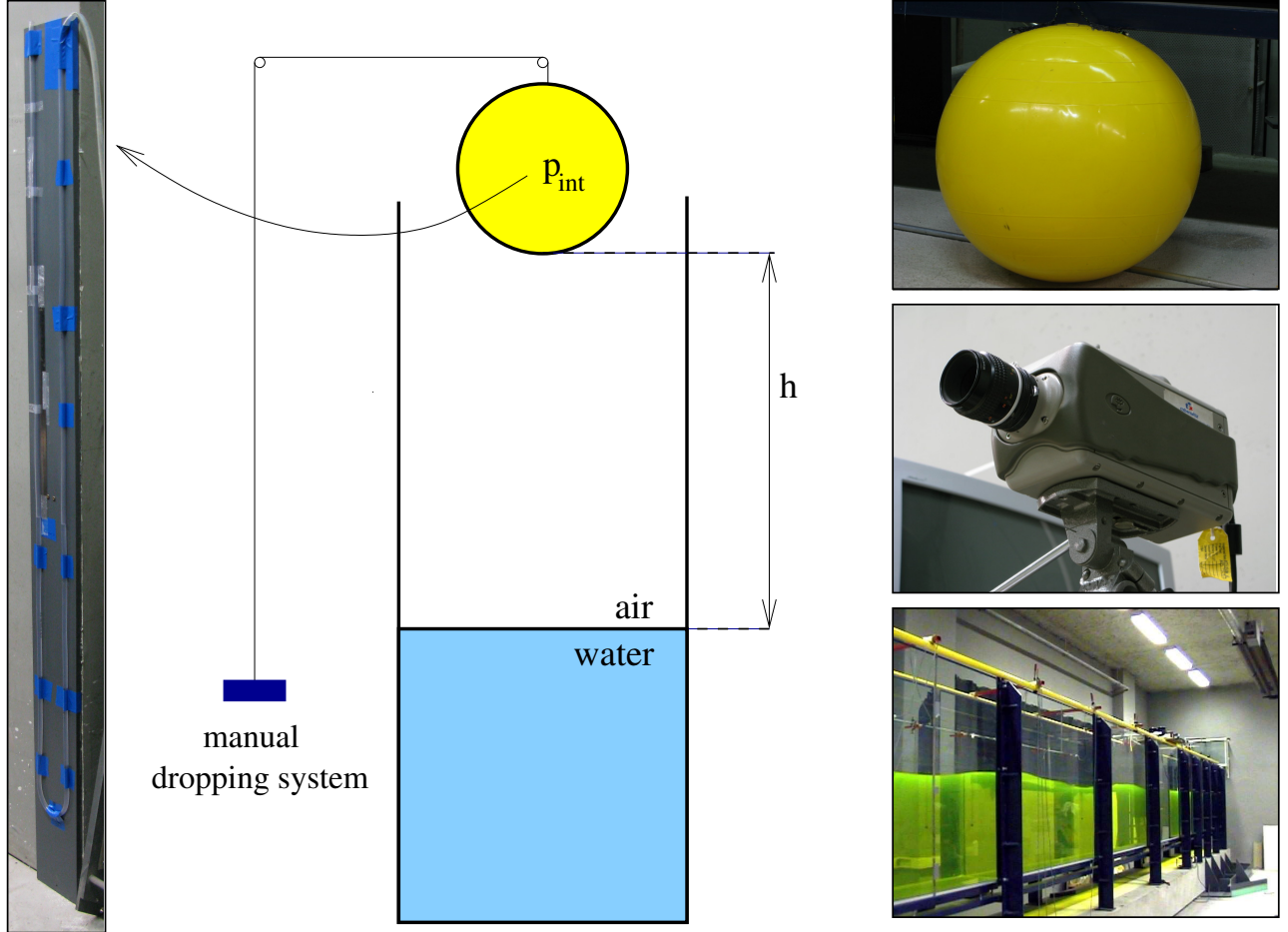


FIG. 6.1 – Principle of the experimental setup (center). Pressure measurement system (left), inflated ball (top, right), fast camera (center, right) and hydrodynamic flume (bottom right)

The water is coloured with fluorescein, in order to improve the diffusion of the light. Analysis of the recorded video provides most of the data for the following phenomenological and parametric study. System used to measure inflation pressure is shown in figure 6.1 (left). It is simply made of a U-tube, graduated and filled of water. The ball has a nominal diameter of 45 cm. This diameter is given by the constructor but it varies with the inner pressure.

6.2.2 Characteristics of the ball

In order to obtain the mechanical properties of the studied material, tensile tests are preliminarily performed. To this end, 12 test pieces are detached from various places on the ball (see figure 6.2 (left)) : upper part (type T), lower part (type B) and equator area (type C). For each type, 3 pieces are used in order to detect an eventual inhomogeneity. To complete this set, 3 other test pieces are detached from the equator area (type Ct), but they are cut orthogonally to those of type C. Dimension of the test pieces are given in figure 6.2 (right). The aim of tensile tests is to obtain the Young modulus and the poisson ratio, but also to check

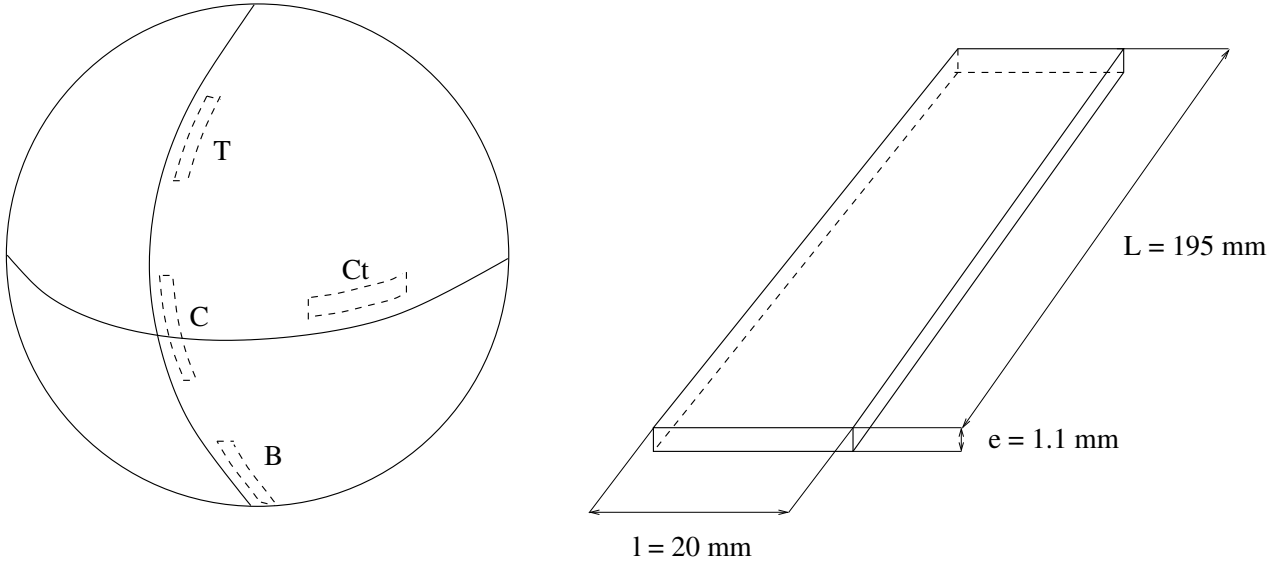


FIG. 6.2 – Position on the ball of the test pieces T,B,C and Ct (left) and their geometric definition in terms of length L , width l and thickness e (right)

both the homogeneity and the isotropy of the material. We also check the limits of elasticity of this material and its fatigue strength. Comparison of the tests realized with the pieces T, B and C give similar results in terms of displacement/strain curves, as shown in figure 6.3 (left). Comparison between the tests realized with the pieces C and Ct (figure 6.3 (right)) also shows a very good accuracy. The repeatability is very satisfactory between the 3 test pieces belonging to a same serie and for each area (T,C,B). This result tends to prove that the material can be considered as homogeneous and isotropic.

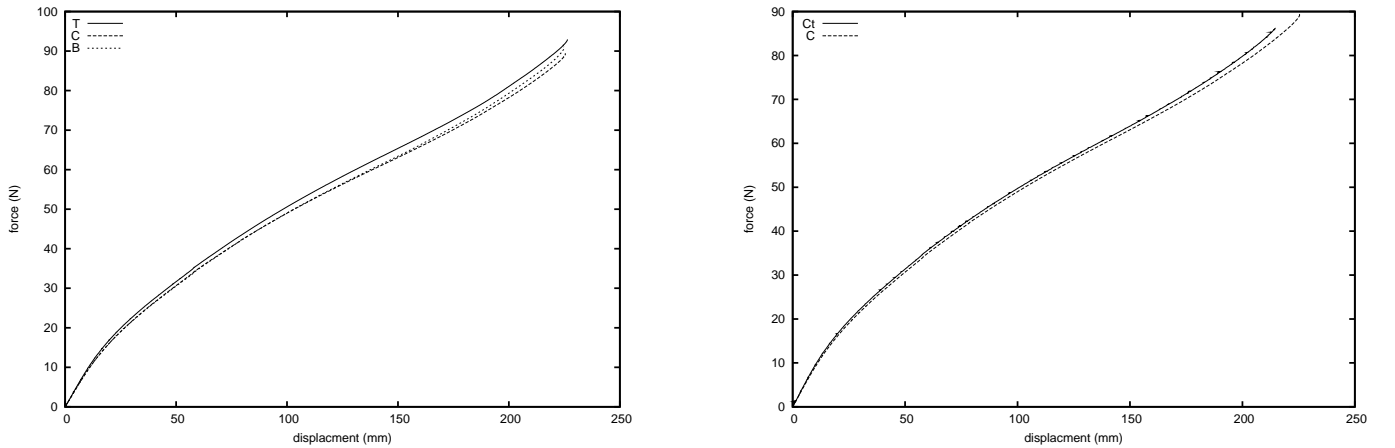


FIG. 6.3 – Tension force (N) in function of the imposed longitudinal displacement (mm) for test pieces coming from various area of the ball (left) and for pieces cut in two orthogonal directions (right)

Young modulus and poisson ratio are obtained by focusing on the beginning of the test, *i.e.* on the period during which the material has a linear behaviour. A gauge is used to determine stresses in longitudinal and transverse direction during the tensile test. Variation of the force

applied for a given longitudinal displacement is used to determine the Young modulus (figure 6.4 (left)). Determination of poisson ratio requires the knowledge of transient displacement in function of the longitudinal one (figure 6.4 (right)). In the range of displacement considered here, the linearity is very good since the linear regression fits very well with the experimental curve.

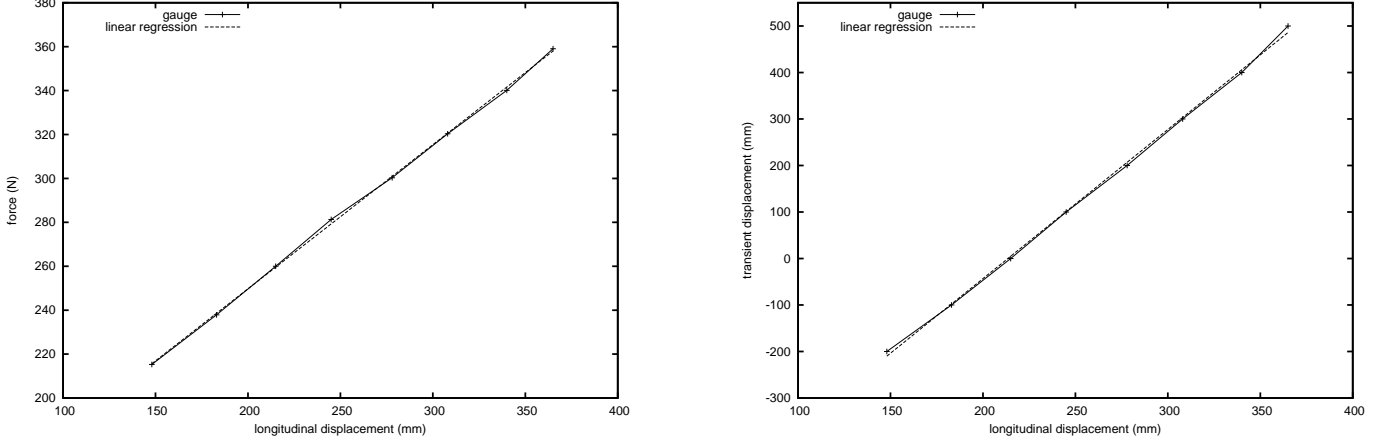


FIG. 6.4 – Tension force (N) in function of the imposed displacement (mm) in the longitudinal direction (left) and displacement in the transient direction versus displacement in the longitudinal direction (right)

Resulting values of the mechanicals properties are sumed up in table 6.1

Young modulus	E (MPa)	302
Poisson's ratio	ν	0.31
Density	ρ (kg.m ⁻³)	1062.16
Thickness	e (mm)	1.1
Mass	M (kg)	0.587

TAB. 6.1 – Mechanical characteristics of the ball, obtained experimentally

No viscosity effect is observed during the tests and the material has a remarkable fatigue strength since even after a rupture, it recovers its original length. According to the shape of the stress/strain curve in figure 6.3 and to the values obtained for E and ν in table 6.1, the material has the characteristics of a polyethylene low density (PELD) [Ashby *et al.*,]. However, since the mechanical characteristics have been deduced from a simple tensile test, we have to check that resulting values are realistic. As mentioned above, the radius varies substancially with the inner pressure as shown in table 6.2.

A simple model of elasticity provides the following relation between the variation of the radius ΔR and the inner pressure Δp :

$$\Delta R = \frac{(R - e)^3}{R^3 - (R - e)^3} (1 - \nu) \frac{3R \Delta p}{2 E}, \quad (6.1)$$

where R is the outer radius of the sphere at rest and e its thickness.

pressure considered (mbar)	corresponding radius
5.2	19.894
16.7	21.119
21.3	20.976
24.6	21.328
28.49	22.027
50.25	22.981

TAB. 6.2 – Ball at rest in the air : radius in function of the inner pressure

Values obtained in table 6.1 are used to plot the evolution of the radius with the inner pressure predicted by (6.1). A linear regression, using measured data is performed and compared to the theoretical radius. The good accuracy of the two curves in figure 6.5 shows that the values of E and ν , obtained experimentally are realistic.

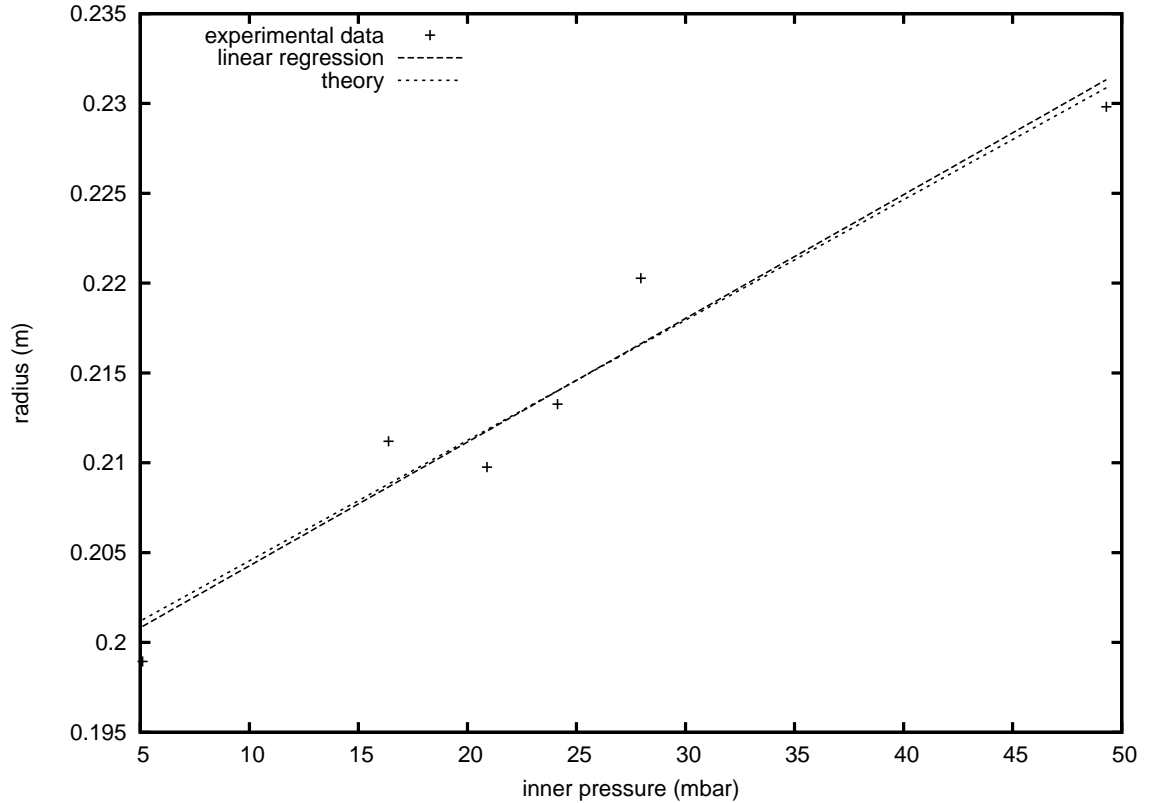
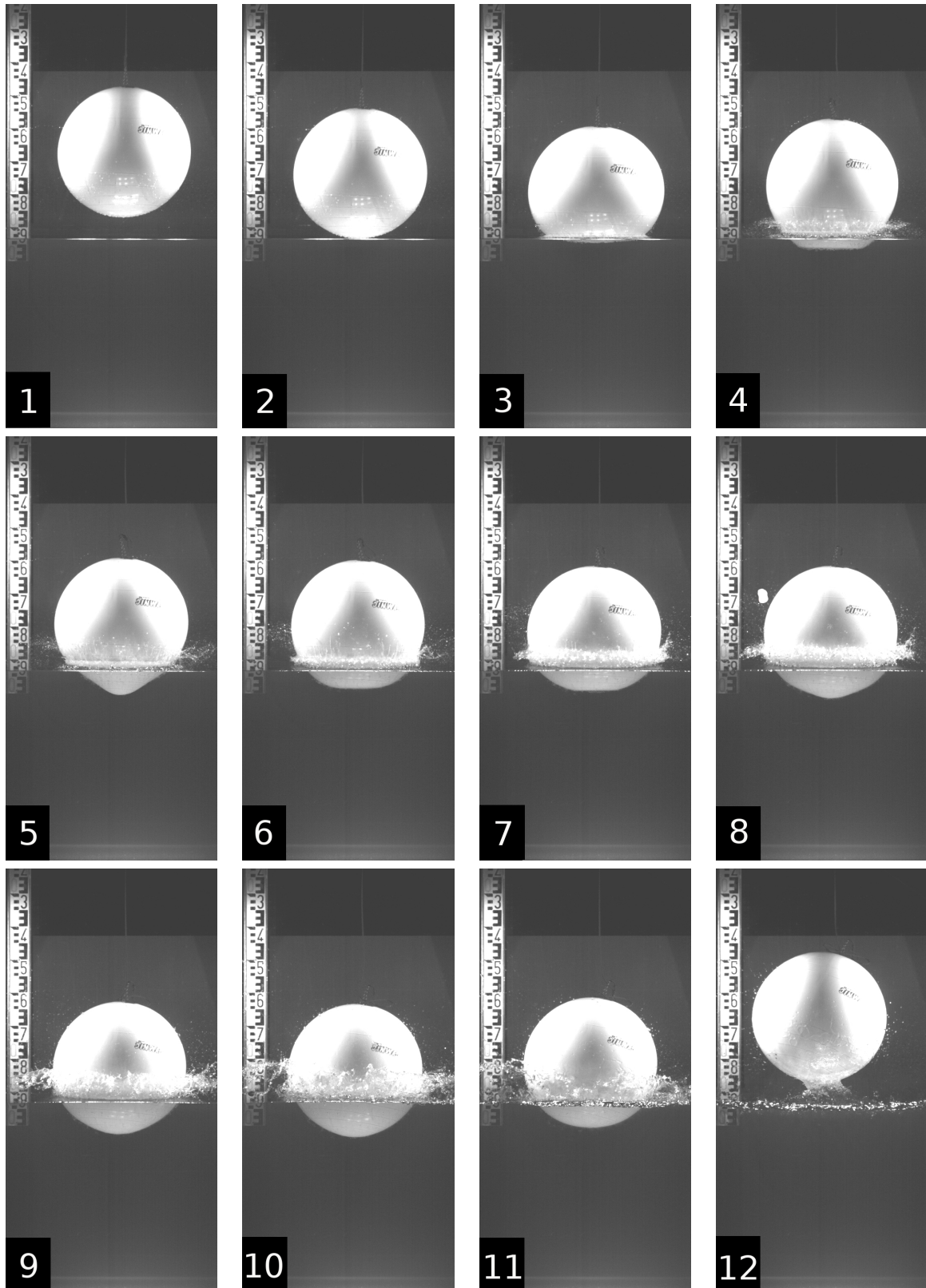


FIG. 6.5 – Radius of the sphere at rest, varying with the inner pressure. Points represent data measured experimentally. A linear regression is performed using these points (dashed lines). The theoretical radius, given by the elastic theory, is represented by thin dashed lines

6.3 Experimental results

6.3.1 Typical behaviour of the ball



TAB. 6.3 – Decomposition of the water entry of the ball in 12 important steps

The penetration of the ball into the liquid is broken down into several steps. In particular, 12 important steps can be highlighted. They are illustrated by pictures of table 6.3 and described in table 6.4.

N°	t (ms)	Description
1	-	Free fall
2	0	First instant of impact
3	1.5	Early stage of penetration : the wetted surface becomes flat
4	3.6	Fast deformation of the ball which recovers its spherical shape.
5	7.2	Maximum of deflection. Formation of a “nose” at the apex
6	9.9	The “nose” disappears while the apex is going up.
7	15.2	The shape becomes almost spheric again.
8	16.4	Relaxation. From this step the ball is not penetrating anymore.
9	18.0	The ball oscillates in the fluid
10	20.1	Oscillation damping
11	22.0	Water exit
12	30.0	Out of water

TAB. 6.4 – Description of each 12 steps of the impact represented in table 6.3, from the beginning of the free fall to the water exit

In figure 6.6, the curve representing the time position of the lower point, corresponding to the initial contact point, is plotted. This point is called apex in the following text. Steps 2,3,4,5,6 and 8 can be linked to remarkable variation of the apex position.

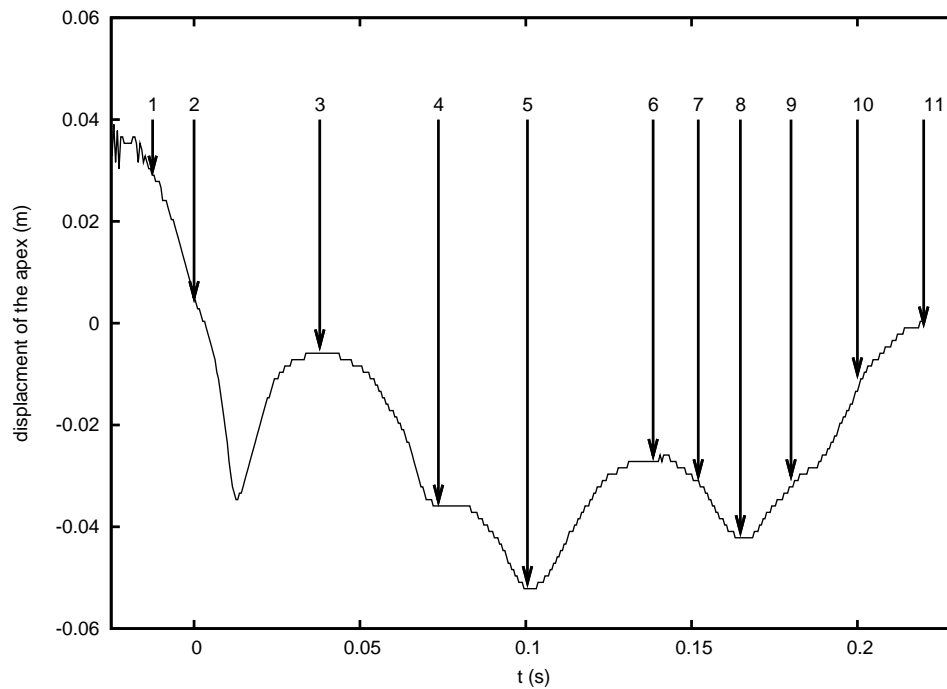


FIG. 6.6 – Position of the apex into an absolute system of coordinates

The position of the apex is measured into an absolute system of coordinates linked to a fixed point. It is used here in a qualitative approach, in order to observe and describe the occurring phenomena. In a more quantitative approach, the component linked to the rigid motion of the ball is subtracted to this displacement to obtain the deflection of the membrane (see section 6.3.2 and followings).

On the basis of these qualitative observations, several remarks can be made. From step 2 to step 3, the ball undergoes a fast deceleration. In the same time, the wetted surface becomes flat. After this step, the study of the kinematics shows that the body is not penetrating anymore. The center of gravity has a vertical motion upward during a short period. then, it penetrates downwards again and the apex begin to oscillate. Amplitude of these oscillations is large, so that a “nose” is formed at the base of the ball. From this step, the problem can not be considered as an impact problem anymore. Once more, the wetting correction does not increase in a significant way from this point.

The oscillation phenomenon in the case of the impact on a fluid free surface is completely due to the hydroelastic coupling. In fact, during the impact of the same ball on a rigid surface, no oscillation and no “nose” formation are observed. Energy of deformation is completely released during the “rebound” (see figure 6.7).

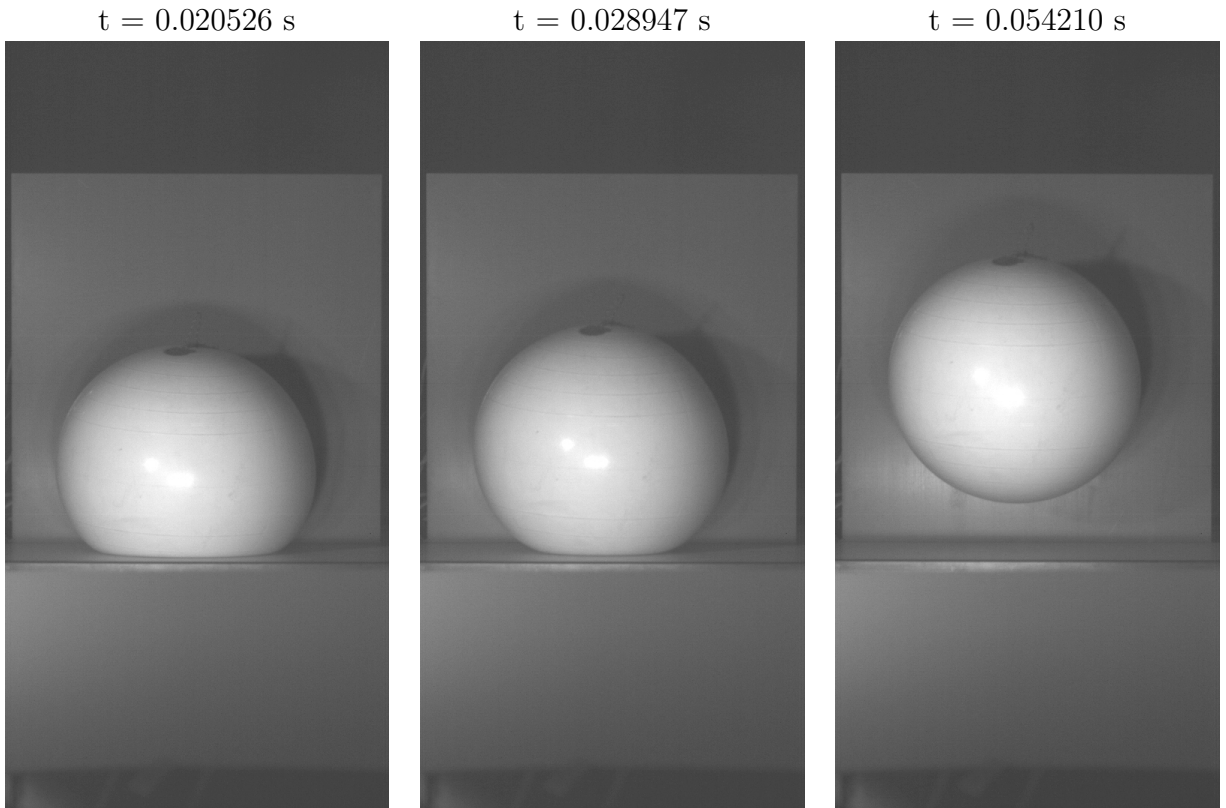


FIG. 6.7 – Impact and rebound of the inflated ball on a rigid surface. Parameters are $p = 20$ mbar and $h = 1.80$ m

During the rigid impact, the ball is deformed in a similar way than at the first instant of the impact on the fluid surface. Then, the ball recovers its original shape without oscillation. This observation enforces the hypothesis that oscillations in the fluid impact are due to a fast swap of energy between the fluid and the solid. Water exit occurs 0.3126 s after initial contact with

water, while contact between the rigid surface and the ball stops 0.0368 s after initial contact. This indicative results is obtained for a 2 m drop test and an inner pressure equal to 20 mbar. During the phase when the wetted surface becomes flat, energy is entrapped by the ball. This energy is released during the oscillation phase. Very few energy seems to be lost during this swap : fluid and solid energies seems to be in balance. It means that the main part of the energy released by the ball is transmitted to the fluid below the ball. However, at each “relaxation” step *i.e.* when the “nose” disappears, water is pushed with a high horizontal velocity by the ball. As a result, jet occurs at each relaxation step. The first two ones appear very clearly. The precise evaluation of the amount of kinetic energy that is lost in the jet requires the knowledge of particules velocity in the jet as well as data on its geometry such as its thickness. Results provided by the present experimental campaign are not sufficient to obtain these informations. To this end, an experimental study, focused on the jet should be performed.

The formation of the “nose” can be explained by a decreasing pressure at the apex (In a rigid body impact, this pressure can become smaller than the atmospheric pressure), creating an effect of suction. Since this formation requires a significant amount of energy, it means that a large part of the energy previously released has been retransmitted by the fluid to the ball.

The two phases (initial impact and oscillation phase) highlighted here involve very different physical phenomena. A dimensional analysis is performed in order to better quantify the importance of each phenomenon during this two phases.

6.3.2 Dimensional analysis

The dimensional analysis shows that three dimensionless numbers are of importance in the problem. In fact, it shows that the deflection w can be written as

$$\frac{w}{R} = f \left(\frac{p_{int}}{\rho V_f^2}, \frac{E}{\rho V_f^2}, \frac{V_f}{V_s} \right),$$

where R is the radius of the sphere. Rigorously, p_{int} is the difference between inner and atmospheric pressure

Characteristic number	Initial phase	Oscillation phase
Euler number : $\frac{p_{int}}{\rho V_f^2}$	$O(10^{-2})$	$O(1)$
Cauchy number : $\frac{\rho V_f^2}{E}$	$O(10^{-1})$	$O(10^{-5})$
Reduced velocity : $\frac{V_f}{V_s}$	$O(1)$	$O(10^{-2})$

TAB. 6.5 – Order of magnitude of the three characteristic numbers highlighted by the dimensional analysis

V_f is the scale velocity of the fluid. It follows from the evaluation of the expansion velocity of the wetted surface. This velocity takes significant values during the initial phase of the

impact, while during the oscillation phase, its order of magnitude is equal to the unity. The scale velocity in the structural problem follows from the formula $V_s = \sqrt{\frac{E}{\rho_s}} \sim 500\text{m/s}$. It is the wave propagation velocity in the material of the ball. E and ρ_s denote respectively the Young modulus and the density of the material.

By distinguishing the two phases (initial phase and oscillation one), the orders of magnitude of the characteristic numbers are established in table 6.5. Order of magnitude of the Cauchy number in particular, shows that there is no strong coupling between the fluid and the structure during the oscillation phase. On the contrary, during the initial phase, the coupling can not be neglected. Euler number gives us an indication of the role played by inner pressure. It shows that it is of poor influence during the early phase of the impact. On the contrary, during the oscillation phase, its influence on the behaviour of the structure is evident. The distinction between these two behaviours is important in an attempt of numerical modelling.

6.3.3 Repeatability

Figure 6.9 shows the history of the deflection at the apex for three successive drop tests performed in the same conditions in terms of inner pressure ($p_{int} = 20\text{mbar}$) and drop height ($h = 1.98\text{m}$). As mentioned in section 6.3.1, the deflection at a given point is obtained by subtracting to the position of this point, its own position if the ball had only a rigid motion. This theoretical position is deduced by simply drawing a circle through the three points S1, S2 and T, located respectively on both sides and at the top of the ball, as shown in figure 6.8. In fact, it was observed that at these three points, deformations are negligible.

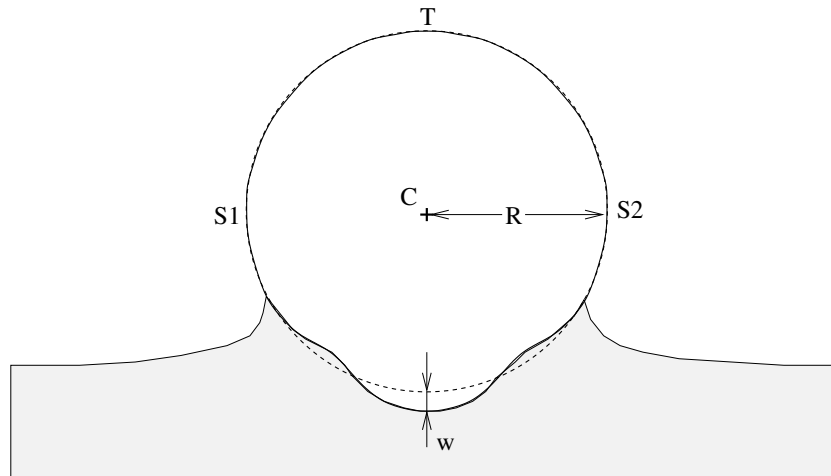


FIG. 6.8 – Measure of the deflection

The following parameters can affect the behaviour of the ball during the impact : heel angle¹, inner pressure, falling height (velocity), temperature and homogeneity of the material. It has been shown in 6.2.2 that the homogeneity is satisfactory. Inner pressure can be measured with a very good accuracy, as well as the falling height. On the contrary, there is no control on the temperature, that can vary in a significant way, since we use a powerful lighting system. The heel angle can also vary since there is no way to control the ball during its free fall. In spite of these lacks of control, figure 6.9 shows that the repeatability of the experiments is good. In fact, the error on the deflection never exceeds 8% (see figure 6.10).

¹we have to take into account that the ball is not perfectly spherical

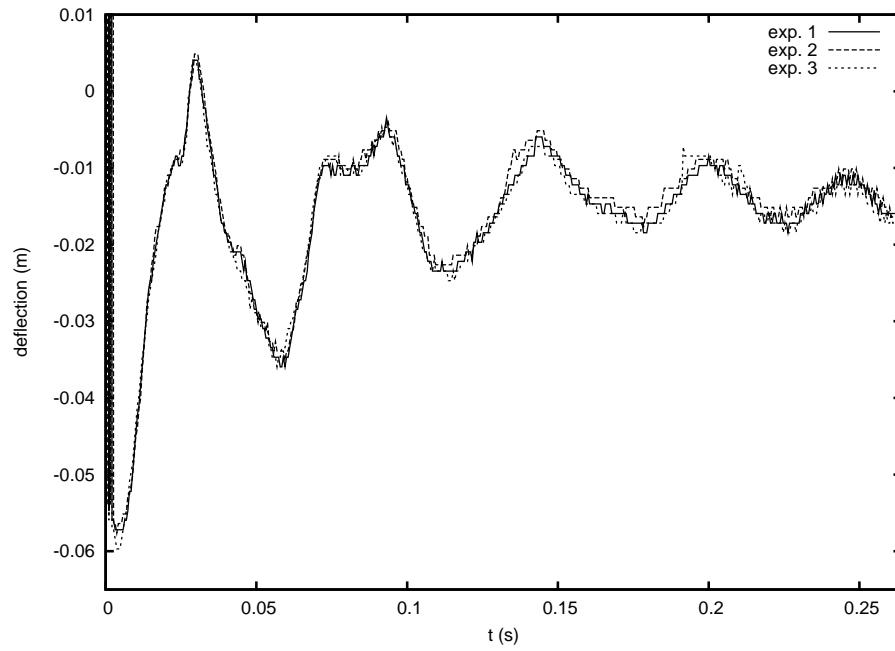


FIG. 6.9 – Repeatability of the measure of the deflection at the apex. Three drop tests are performed successively

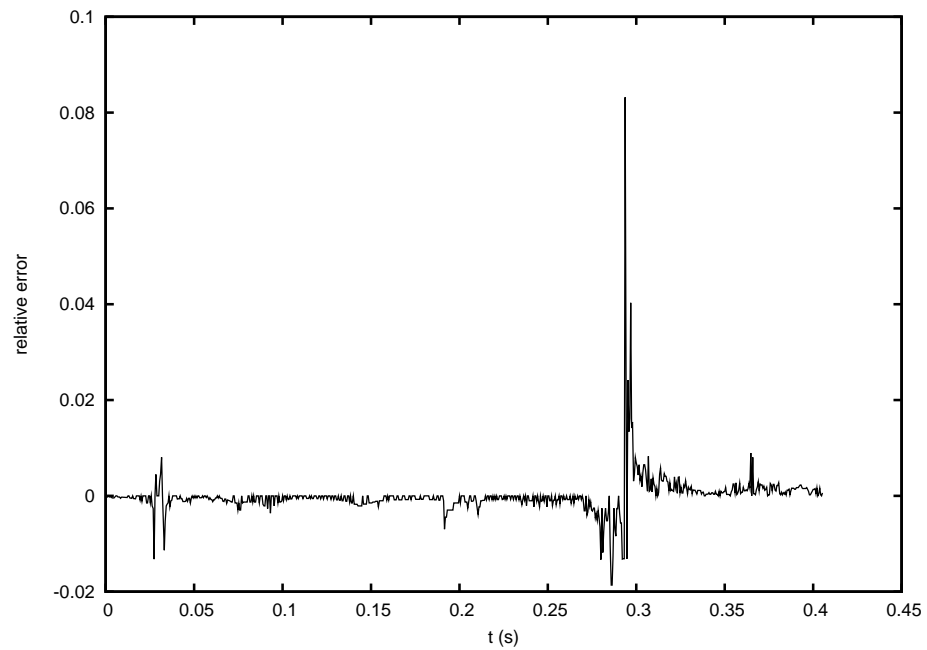


FIG. 6.10 – Relative error versus time between the three measures of the deflection at the apex

According to figure 6.9, the deflection presents 5 local maxima before water exit in the present case. Amplitude of the oscillations is damped very fastly. As a consequence, they are not visible to naked eye after the third one.

6.3.4 Variabilities

There are mainly two parameters in this problem : falling height (giving the velocity at initial contact time) and inner pressure (governing the rigidity of the elastic membrane). As shown in section 6.3.3, these two parameters are well controlled in the present experimental setup. The influence of these two parameters will hence be studied in the sequel.

Variability with inner pressure

In figure 6.11, 7 values of the inner pressure are successively considered : 10.5, 15.2, 20.1, 25.6, 30.6, 50.3 and 71.5 mbar. During this serie of test, the falling height is set to 1.923 m. In this figure, the whole impact is not detailed. Only the first instants of the impact, up to the first peak in the deflection (corresponding to the formation of a “nose”), are described.

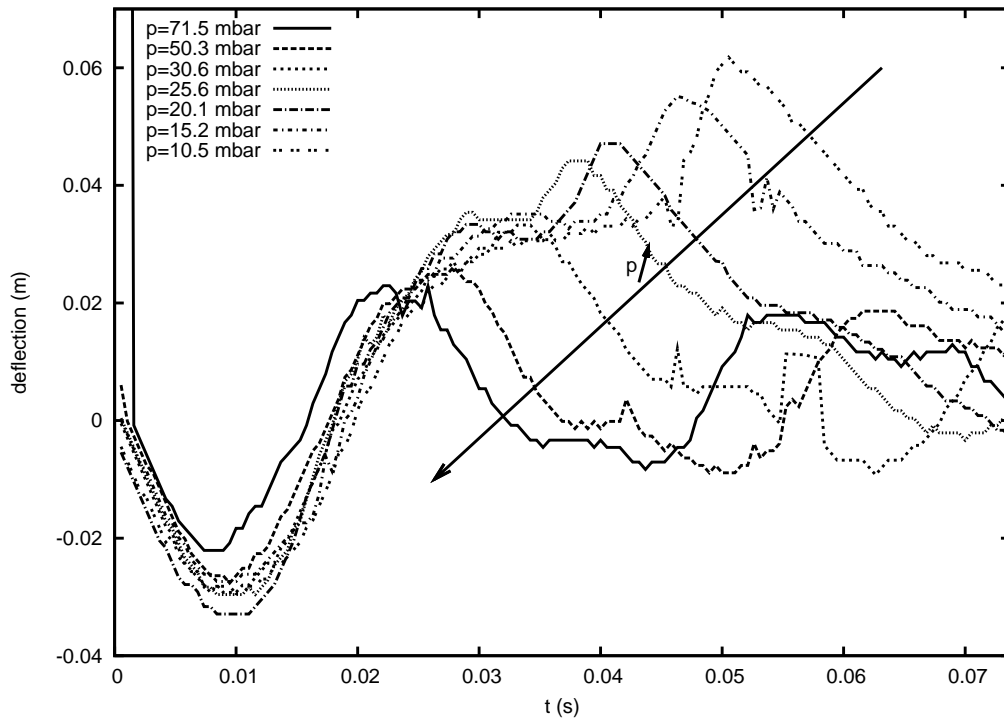


FIG. 6.11 – Representation of the deflection at the apex for 7 values of the inner pressure. First instants are considered and attention is focused on the first peak. The arrow is oriented from the lowest inner pressure to the highest

It should be noted that the time variations of the deflection at the apex are quite similar whatever the value of the inner pressure at the first instant. When the oscillations start, its influence is more noticeable and the smaller the inner pressure, the greater the deflection.

These observations are in accuracy with the previous dimensional analysis. Small value of Euler number during the penetration phase is linked to a poor influence of the inner pressure on the dynamic of the system. On the contrary, Euler number has significant value during the oscillation phase and the influence of the inner pressure can not be neglected in that case. For pressure smaller than 25 mbar, the maximum of deflection appears later than in the other cases. It follows an intermediate step during which the deflection presents an inflexion point. This phenomenon does not appear for greater pressure. It is due to the fact that the apex is not visible during the whole observation period, as illustrated in figure 6.12.

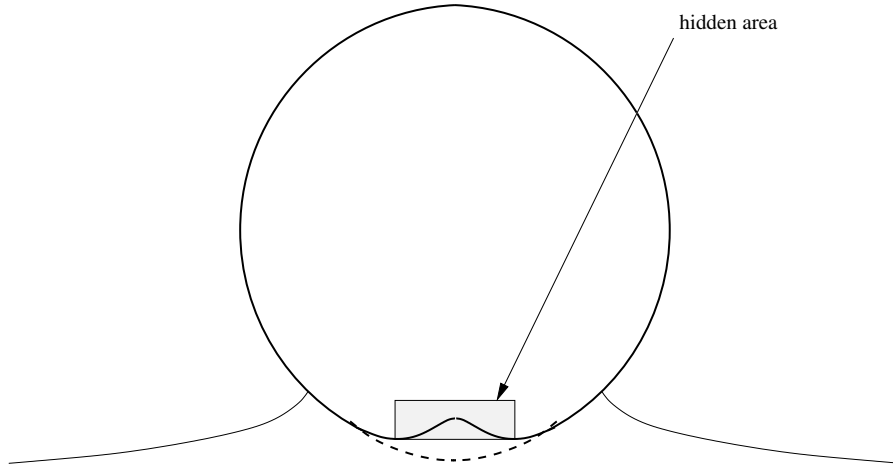


FIG. 6.12 – Sketch of the ball in one of its vertical equatorial plane. For low inner pressure, the deflection at the apex can be important. As a consequence, a large part of the wetted surface can be hidden to the camera

It can also be noted that azimuthal modes, visible in figure 6.13, can not be neglected for inner pressure below 15 mbar *i.e.* for the last two experiments. Such a behaviour is particularly difficult to modelize, since the axisymmetry of the problem is not conserved. In a first attempt, this occurrence must be avoided, by setting the inner pressure at a sufficient value.

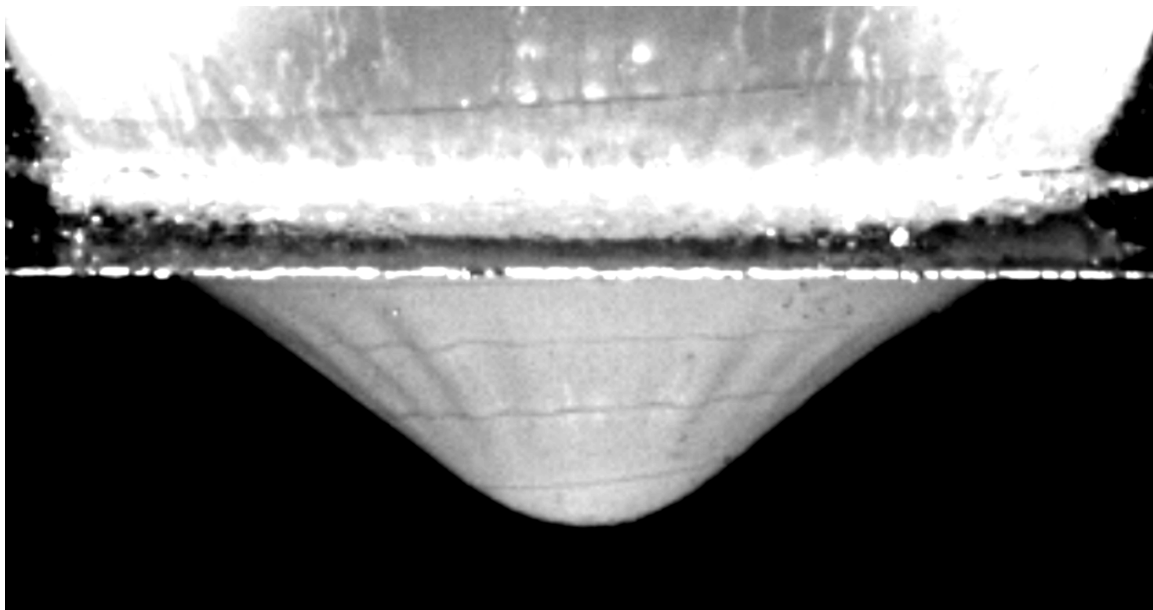


FIG. 6.13 – One of the effects of low inner pressure : the occurrence of azimuthal modes in the deformation of the body

As expected, the higher the inner pressure, the higher the frequency of vibration. Table 6.6 illustrates this matter of fact, by giving the first frequency of vibration in function of the inner pressure.

pressure (mbar)	frequency (Hz)
10.6	11.1
15.2	12.1
20.1	13.0
25.6	14.8
30.6	17.6
50.3	23.2
71.5	27.8

TAB. 6.6 – Value of the first frequency for different values of inner pressure.

Variability with the initial velocity

At first instant of contact, the velocity is controlled by the falling height. In the present section, this height is set to 4 successive values, listed in table 6.7. The inner pressure is set to 20 mbar.

falling height (m)	theoretical velocity ($m.s^{-1}$)	measured velocity ($m.s^{-1}$)
0.25	2.21	2.17
0.5	3.13	3.07
1	4.42	4.10
2	6.26	5.05

TAB. 6.7 – Theoretical and practical velocity at the first instant of contact

Discrepancy between the theoretical value $\sqrt{2gh}$ of the velocity and the measured one in table 6.7 is questionable. This discrepancy can be due to parallax effect or to the presence of the sides of the flume, that are close to the ball during its free fall. As shown in figure 6.14, the behaviour of the ball is similar for each initial velocity considered here. Of course both the maximum penetration and the amplitude of the deformation increase with the velocity. The frequency of the oscillations does not vary with the initial velocity : only a phase shift is observed.

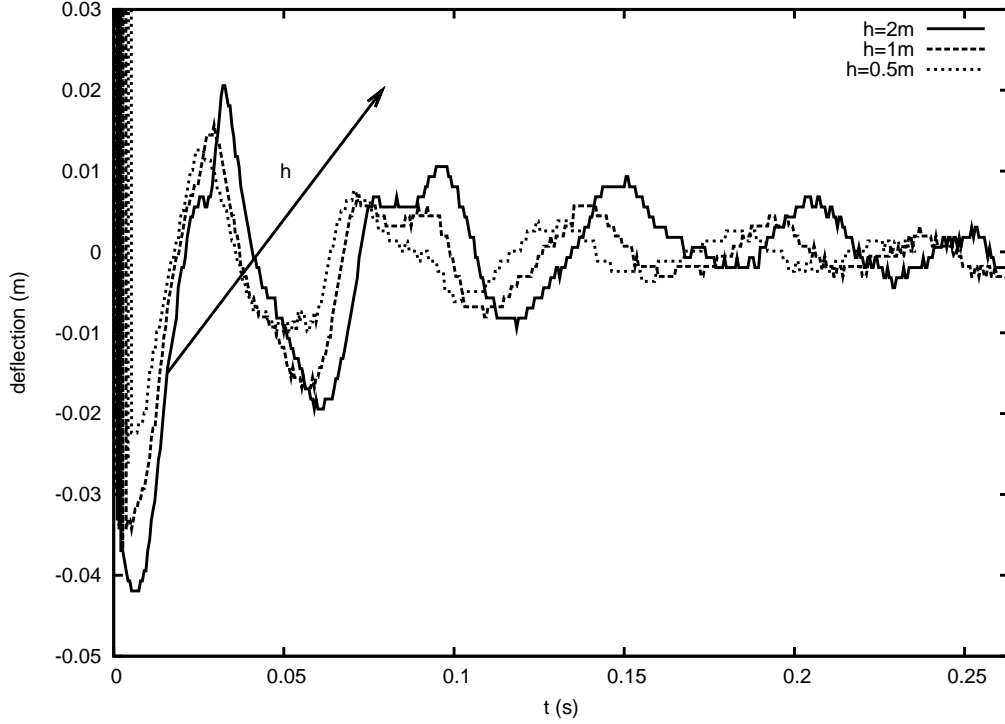


FIG. 6.14 – Influence of the height of the free fall on the behaviour of the ball. The arrow shows the direction in which h increases

6.4 Comparison to numerical models

In order to describe the early stage of the impact, simple linearized model may suffice. In the sequel, experimental results will be compared to an hydrodynamic Linearized Wagner model coupled with an elastic model for the structure.

6.4.1 Coupled linearized Wagner model

The linearized Wagner theory [Wagner, 1932] is based on potential theory. The gravity is supposed to be negligible, as well as the capillarity effect. The fundamental hypothesis of the model is that the deadrise angle must be small. The ball can be locally modelled by a paraboloid with a radius of curvature R in the vicinity of the apex. R is supposed to be large compared to the penetration depth. This last point allows us to linearize the wetted surface as a flat disc in expansion into the fluid. This model will hence be available only for the first instant of the impact. However, since the wetted surface becomes flat during the first instant of the water entry, this model is particularly suitable.

The model developed by [Scolan, 2004] to deal with hydroelastic interaction during axisymmetric body impact is used here. In this approach, the structural deflection w , is broken down as series of normal modes. A weight $q_n(t)$ is affected to each mode so that :

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) w_n(x, y).$$

The mode shape w_n depends on the prescribed boundary conditions. They are expressed with Bessel functions of zeroth order. In the present case, the disc representing the wetted surface is supposed to be clamped along its outer boundary. Hence, only J_0 and I_0 are used. The hydrodynamic model is formulated in terms of displacement potential, which verifies a boundary value problem. This boundary value problem is schematized in figure 6.15. $h(t)$ denotes the instantaneous penetration of the section.

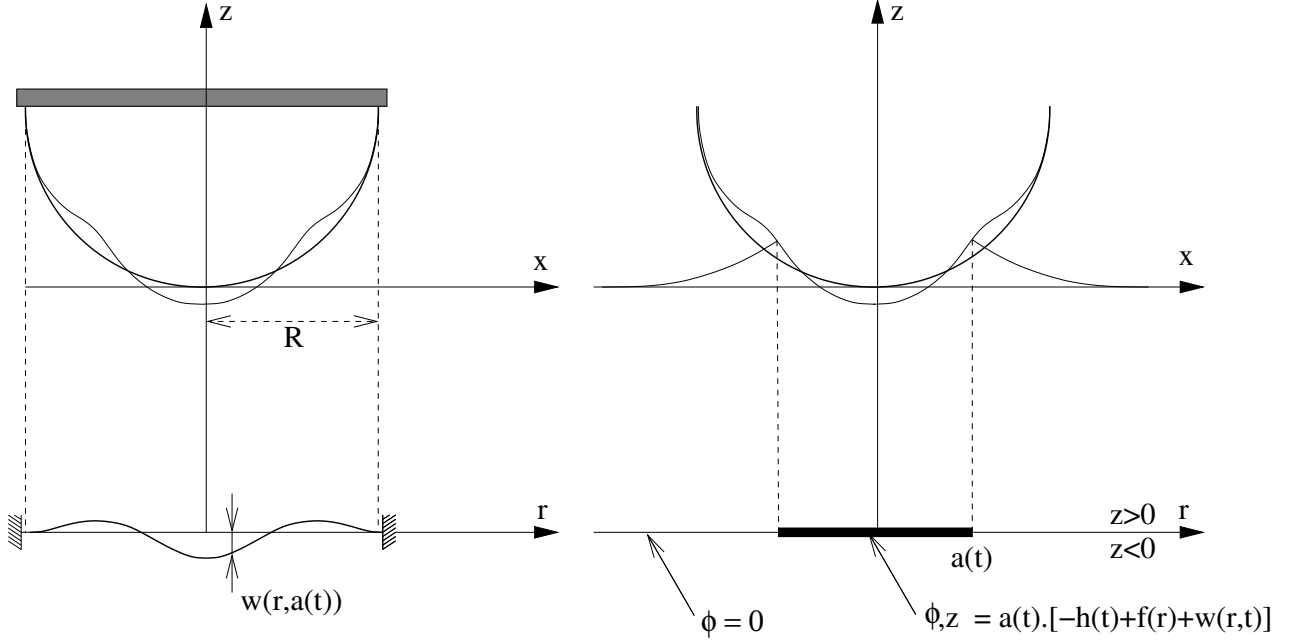


FIG. 6.15 – Representation of the coupled linearized Wagner problem, formulated in terms of displacement potential. The structural problem (left) is decomposed on the deformation modes of a flat disc of radius R . The hydrodynamic problem (right) is linearized by representing the wetted surface as a flat disc of radius $a(t)$, in expansion into the fluid

The solution is sought under its Hankel transformed form. The wetting correction is obtained thanks to the Wagner condition, which stipulates that the vertical displacement at the contact line is finite. That yields an equation for the position of this contact line, which reads

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n Q_n = \int_0^t V(\tau) d\tau - \frac{a^2}{3R}, \quad \text{with} \quad Q_n = \int_0^{\pi/2} \sin \theta w_n(a(t) \sin \theta) d\theta,$$

where $a(t)$ denotes the radius of the contact line. From [Sneddon, 1966], the velocity potential ϕ can be expressed in a closed form as

$$\phi(r, a) = -\frac{2V(t)}{\pi} \sqrt{a^2 - r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n \Phi_n, \quad \text{with} \quad \Phi_n = \frac{2r}{\pi} \int_0^{\text{argch}(\frac{a}{r})} \cosh(x) Q_n(r \cosh x) dx,$$

where $V(t)$ denotes the instantaneous velocity of penetration and r is the radial coordinate. A time differential system for $a(t)$ and $q_n(t)$ is formulated and solved. If free drops are considered, Newton law closes the system of equations.

6.4.2 Kinematics

In the present simulation, time history of the velocity is imposed from experiments. In figures 6.16, histories of both the penetration and the velocity are plotted. Acceleration of the

ball is plotted in figure 6.17.

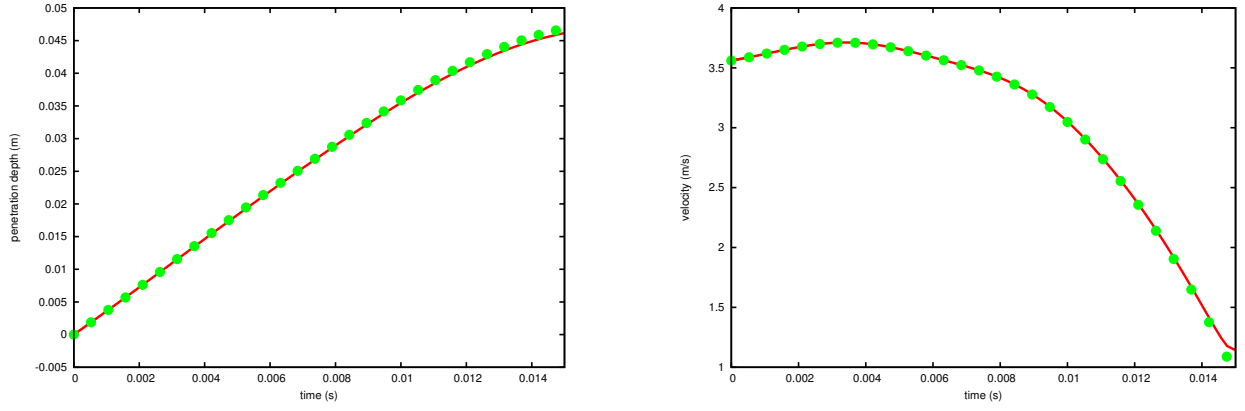


FIG. 6.16 – Penetration (left) and entry velocity (right) during early stage of the impact. Solid lines shows the kinematics obtained by numerical simulation. Datas represented by points are issued from the experiments

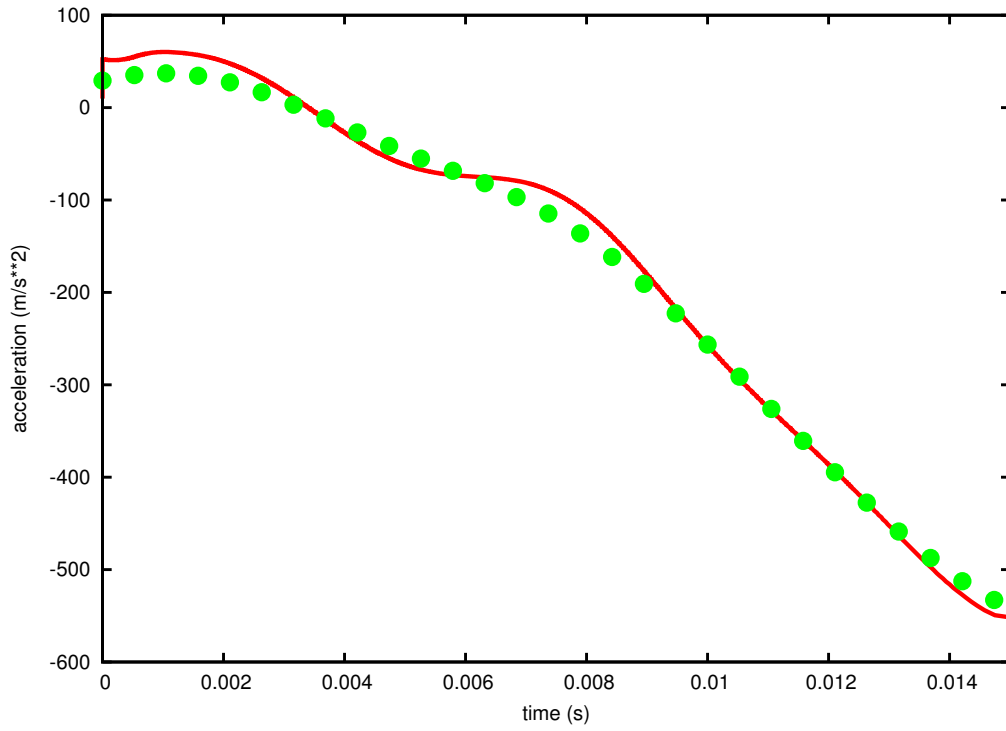


FIG. 6.17 – Acceleration during early stage of the impact. Solid lines shows the kinematics obtained by numerical simulation. Datas represented by points are issued from the experiments

6.4.3 Deformations

Deformations of the wetted surface can be compared to those measured during the experiments. The results of these comparisons are shown in figure 6.18 and 6.19. It shows that during the first stage of penetration, the present model accurately predicts the size of the wetted surface and its expansion. In particular, the fact that the free surface becomes almost flat is well reproduced.

We can not go more insight the following stage with this model. In fact, the present linearized Wagner model handles with impact problem. Since the free fall velocity is almost zero, oscillation phase can not be considered as an impact phase anylonger and alternative models must be developped.

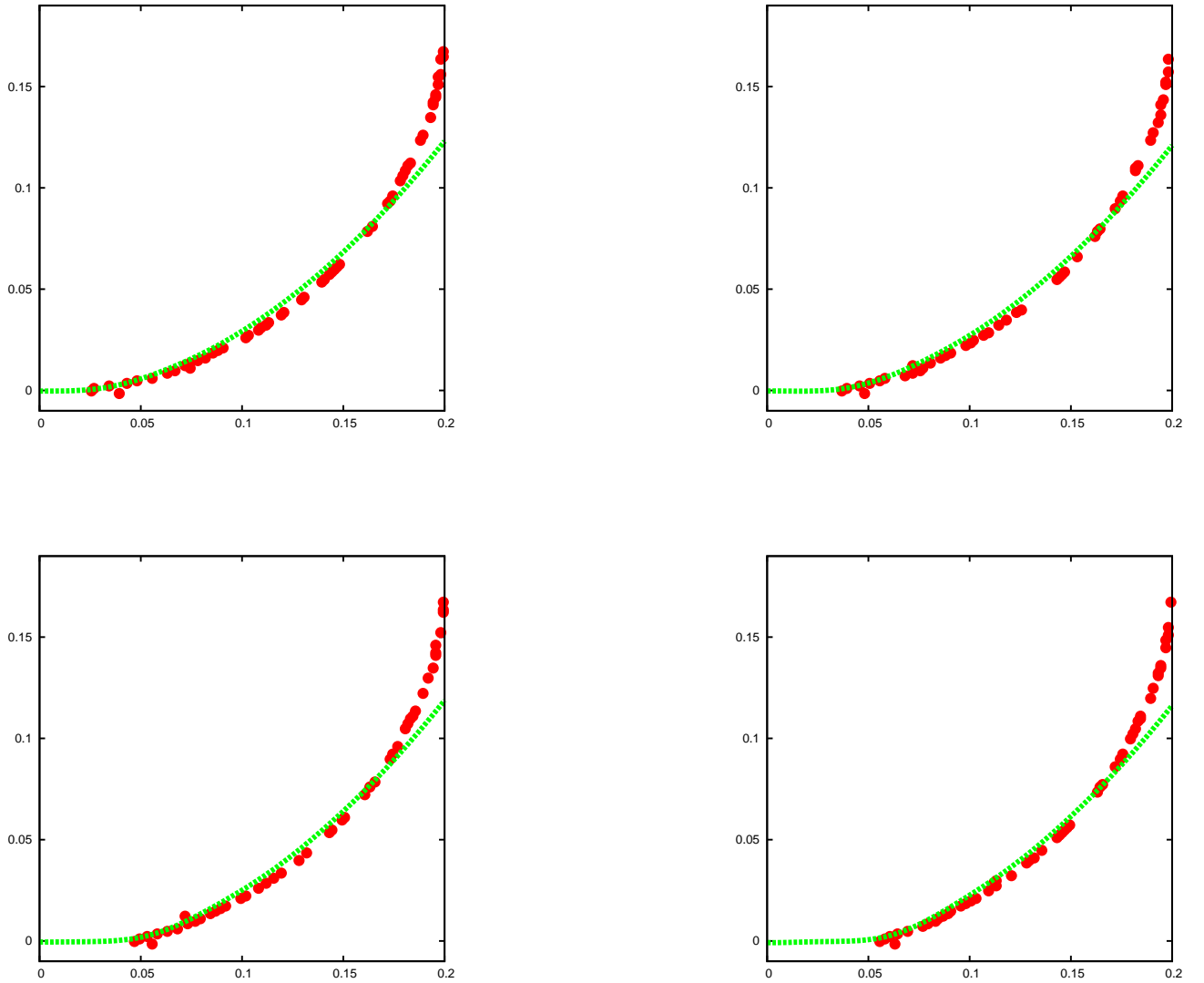


FIG. 6.18 – Successive deformed shapes (steps 1 to 4) of the ball during the early impact. Solid lines are obtained by numerical simulation and deformation represented by lines and points are measured during the experiments

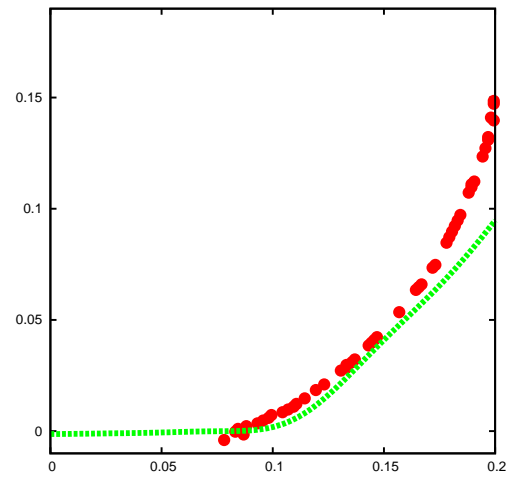
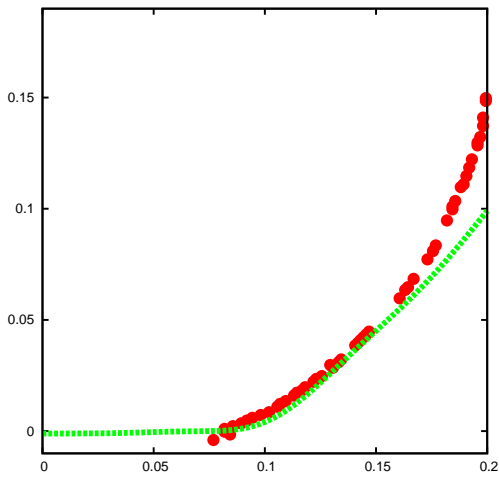
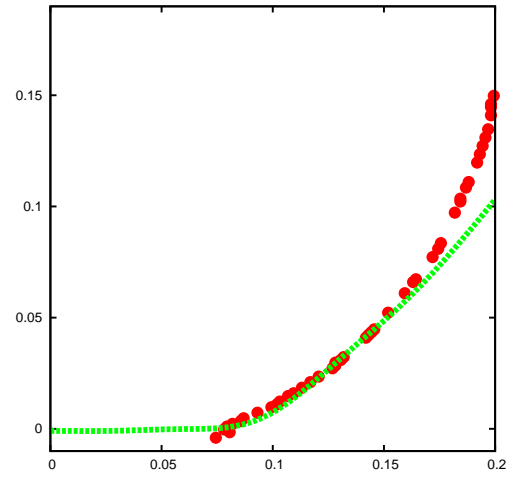
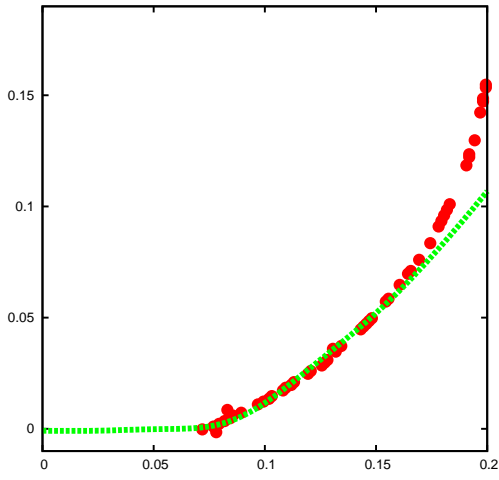
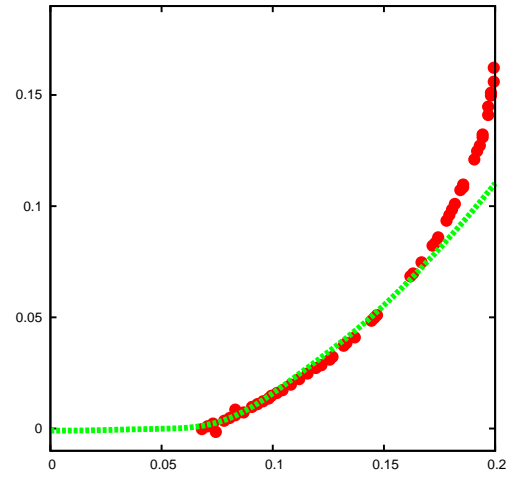
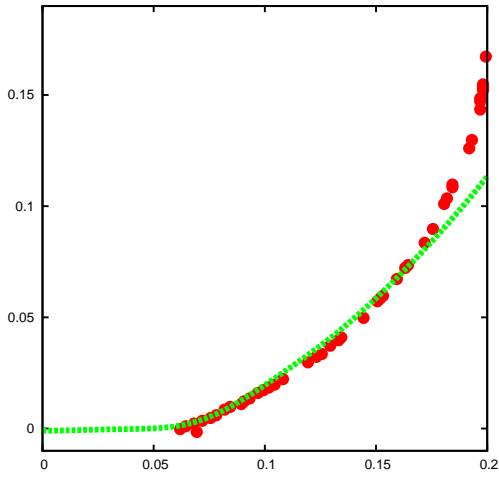


FIG. 6.19 – Successive deformed shapes (steps 5 to 10) of the ball during the early impact. Solid lines are obtained by numerical simulation and deformation represented by lines and points are measured during the experiments

6.5 Conclusions and perspectives

In the present experimental study, some key points have been highlighted. First, occurrence of two distinct phases (if we do not take into account the water exit) has been clearly observed. An important result lies in the fact that governing parameters are not the same during these two phases. In particular, the inner pressure play a very important role during the oscillation phase, whereas its role during the early impact stage is not so evident. This aspect has been confirmed by a dimensional analysis, in which the inner pressure appears in the Euler number $Eu = \frac{p_{int}}{\rho V_f^2}$.

The present experimental study provides some data that can be useful to validate coupled model of impact. An example has been given with the linearized Wagner model. It has been shown that, by using this model, we are able to predict the behaviour of the structure when it becomes flat, as well as the expansion in time of the wetted surface. A significant effort must be performed, to develop models, able to predict precisely kinematics, as well as deformation history during the impact. It can be also interesting to focus on the oscillation phase, whose mechanism is very complex and not simple to modelize. It is also possible to extract data about water exit from the present campaign. This problem has not been investigated at all here.

In future experimental campaigns, it could be interesting to measure evolution of the position of the contact line. This position is required to obtain the wetted surface, and to be able to evaluate the added mass at a given time, as well as an approximation of the force acting on the solid. It could be also interesting to measure both velocity of the fluid particles in the jet and its geometry, in order to evaluate the amount of energy that is transmitted to it.

Chapitre 7

Etude expérimentale : impact d'un système de flottabilité d'hélicoptère

7.1 Introduction

Lors de l'amerrissage d'un hélicoptère, l'impact sur l'eau est amorti par le système de flottabilité. Ce système est constitué de flotteurs (généralement 4) qui sont gonflés lorsque l'impact est imminent. Les photos de la figure 7.1 montrent les flotteurs en cours de gonflage. Leur rôle est d'absorber un maximum de l'énergie au cours de l'impact à proprement parler, et d'assurer ensuite la flottabilité de l'aéronef.



FIG. 7.1 – Système de flottabilité d'un hélicoptère NH90 en cours de gonflage (haut) et complètement gonflé (bas)

Dans cette étude, on cherche à déterminer les efforts agissant sur les flotteurs ainsi que dans les liaisons flotteurs-hélicoptère lors de l'impact vertical. C'est dans cette optique qu'une campagne d'essais à l'échelle un a été réalisée au BGO FIRST à la Seyne sur Mer, dans le cadre du programme GIS HYDRO. Le BGO FIRST est un bassin de génie océanique conçu pour réaliser des essais combinés de houle et de courant. Il dispose d'une fosse centrale pour les applications offshore, d'un plancher mobile verticalement et d'une plate-forme horizontale mobile. Ses principales caractéristiques sont :

- longueur : 40 *m*
- largeur : 16 *m*
- profondeur : 5 *m*
- profondeur fosse : 10 *m*, diamètre : 5 *m*
- période de houle : de 0.7 à 3 *s*
- hauteur de vague : max. 0.8 *m*
- vitesse de courant :
 - maximum 0.4 *m/s* pour 3 *m* de profondeur
 - maximum 1.2 *m/s* pour 1 *m* de profondeur
- vitesse longitudinale maximum de la plate-forme : 1.5 *m/s*
- vitesse transversale maximum de la plate-forme : 0.8 *m/s*
- vitesse max. du vent : 7 *m/s*.



Lors de cette campagne, ni la génération de houle, ni celle du courant, ni celle du vent ne seront utilisées.

7.2 Le dispositif expérimental

La photographie de la figure 7.2 présente une vue globale de la maquette qui est utilisée.

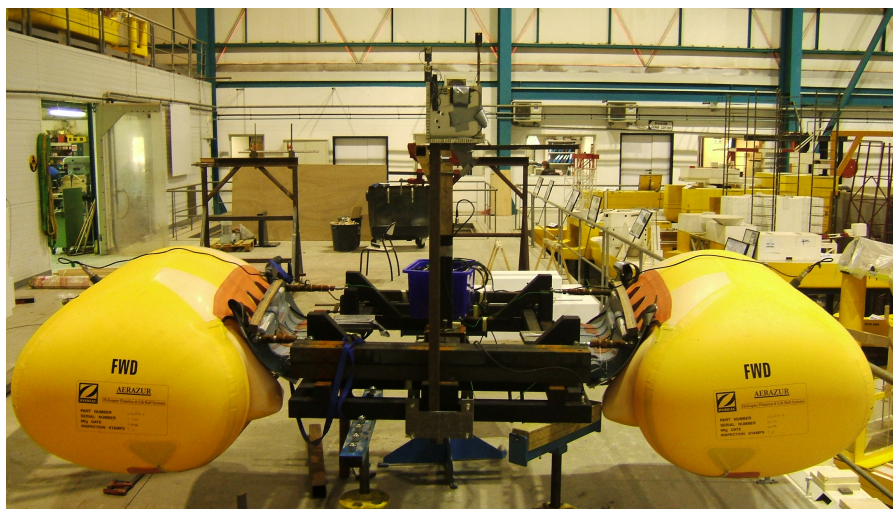


FIG. 7.2 – Vue d'ensemble de la maquette hors d'eau, réalisée pour l'étude de l'impact d'un système de flottabilité d'hélicoptère

Le châssis

Comme le montre la figure 7.2, le modèle expérimental est constitué d'un châssis central formé de profils en acier plein. Ce châssis représente de manière simplifiée la structure de l'hélicoptère. Il a été réalisé de manière à être le plus transparent possible d'un point de vue hydrodynamique. L'étude est en effet centrée sur le système de flottabilité. L'assiette et la gîte sont des paramètres que l'on fait varier en déplaçant du lest sur le châssis. Le châssis seul (sans les ballons) mesure 2.08 m de long et 1.06 m de large. Sa masse varie de 1030 à 1146 kg selon le lest qui est ajouté. Cette masse a été calculée pour être la plus représentative possible du cas réel, en tenant compte du fait que seule la moitié d'un hélicoptère est modélisée, ainsi que de la sustentation qui serait générée par le rotor. On considère classiquement que la prise en compte de cette sustentation revient à diviser par trois la masse totale.

Le dispositif de largage

Compte tenu des hauteurs de largage peu importantes lors de ces essais (de 0 à 0.3 m sous les ballons), la maquette est directement suspendue au pont de levage du bassin. Le système de largage est un système de type "largueur de spi" (voir figure 7.3). Il est relié au moufle du pont et à la maquette par un câble assez long de manière à ne pas transmettre de mouvements parasites à la maquette lors du largage, déclenché manuellement.



FIG. 7.3 – Largueur de spi utilisé pour le lâcher de la maquette

Les flotteurs

Les flotteurs utilisés sont des éléments d'un système de flottabilité réel de Dauphin (flotteurs arrière). Le montage des flotteurs est quasi-identique à celui existant dans une configuration réelle. Le caisson original les contenant a ainsi été intégré à la maquette. Néanmoins, les flotteurs correspondant rigoureusement à ce caisson n'ont pas pu être utilisés du fait de leur vétusté. Ils ont été remplacés par un jeu de flotteurs neufs. Cette substitution a entraîné des modifications des systèmes d'attache. Pour la liaison supérieure la configuration originale est conservée : le flotteur est reliée en quatre points à un axe fixé sur la partie supérieure du caisson. En revanche, la sangle qui maintient le flotteur par dessous a été fixée directement sur le bâti (cf. figure 7.4, photo de gauche). En outre, le caisson est prolongé par un carénage (cf. figure 7.4, photo de droite), de manière à rendre la maquette plus réaliste et à protéger les ballons des arêtes vives du bâti.

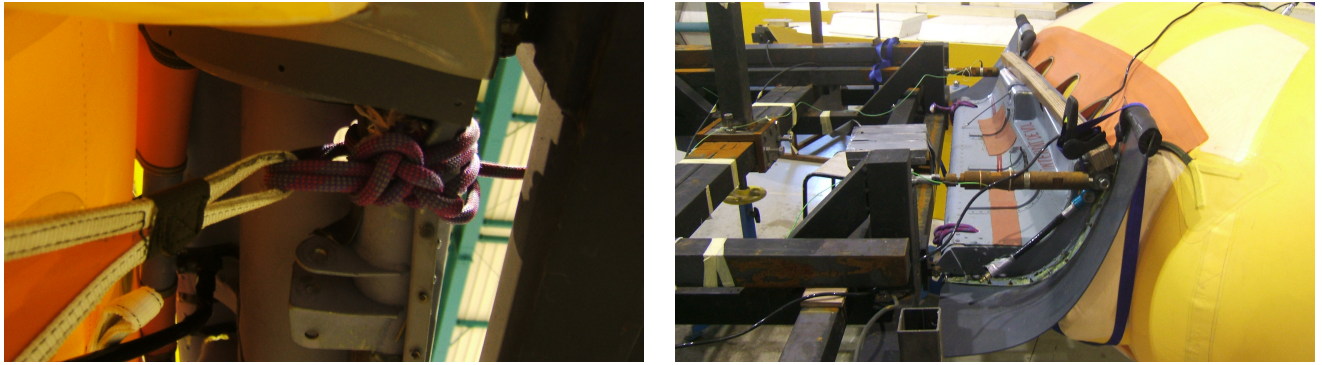


FIG. 7.4 – Modifications apportées par rapport à la configuration réelle : flotteur maintenu par des sangles (gauche) et prolongement du carénage (droite)

Les essais ont été réalisés avec 3 pressions de gonflage différentes : 200 mbar, 150 mbar et 100 mbar. Ces valeurs sont des valeurs de surpression par rapport à la pression atmosphérique.

7.2.1 Instrumentation

La maquette est instrumentée de manière à disposer à tout instant de la cinématique de chute du bâti, des efforts dans les liaisons ainsi que de la pression à l'intérieur des flotteurs.

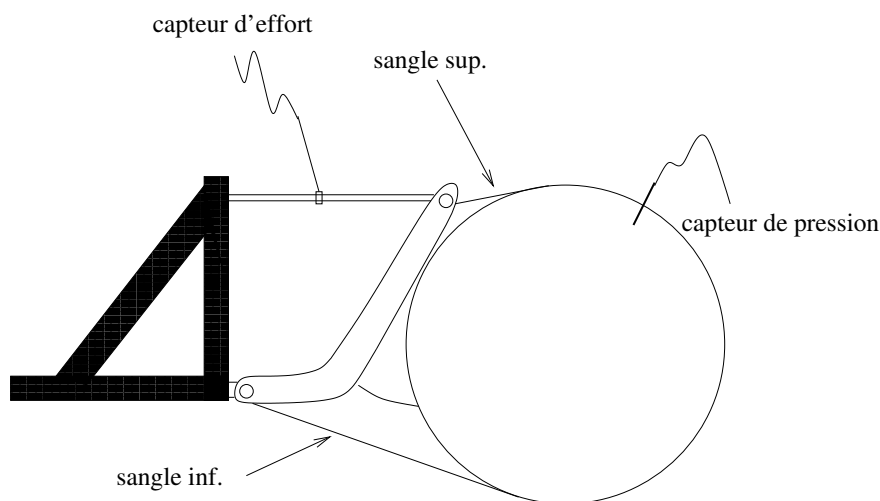


FIG. 7.5 – Schéma de principe du montage

Mesure de la cinématique

La cinématique de chute est mesurée au moyen du système de mesure de déplacements sans contact KRYPTON avec suivi de cibles (diodes). Afin de mesurer les différents mouvements, 3 cibles matérialisant un repère lié au modèle sont fixées sur le châssis. Le système KRYPTON mesure les mouvements de ce repère et nous donne donc accès aux 3 mouvements de translation et aux 3 mouvements de rotation de la maquette. La fréquence d'échantillonnage utilisée est égale à 500 Hz. Les cibles sont situées à l'avant de la maquette et surélevées de manière à éviter les éclaboussures (voir figure 7.6) qui peuvent les masquer et éliminer une partie de l'information.

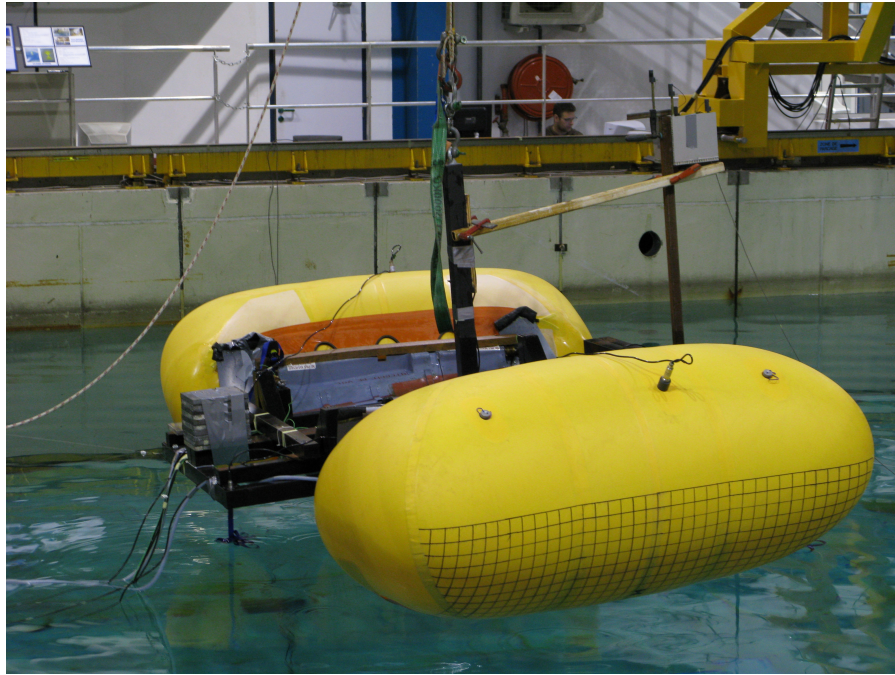


FIG. 7.6 – Maquette suspendue au dessus du bassin. Les cibles nécessaires à la mesure des mouvements par le système KRYPTON sont positionnées à l'avant et surélevées pour éviter les éclaboussures

Mesure des accélérations (3 voies)

En complément des mesures effectuées par le système KRYPTON, la maquette est équipée de trois accéléromètres en position arrière tribord, avant bâbord et centre (sur le mât, comme le montre la figure 7.7). Les accélérations sont mesurées perpendiculairement au plan du châssis. La fréquence d'échantillonnage est de 4 kHz. Il faut noter que l'accéléromètre placé à l'avant bâbord de la maquette était hors d'usage dès le début des essais.



FIG. 7.7 – Accéléromètre central, placé sur le mât par lequel la maquette est suspendue

Afin de vérifier le bon fonctionnement des accéléromètres et la cohérence des résultats, les données issues de krypton sont dérivées deux fois et comparées aux signaux issus des accéléromètres. La figure 7.8 montre l'accord entre la mesure par les accéléromètres, situés au

centre (trait bleu foncé) ainsi que sur le flotteur tribord (trait bleu clair) et la double dérivation du signal Krypton (vert).

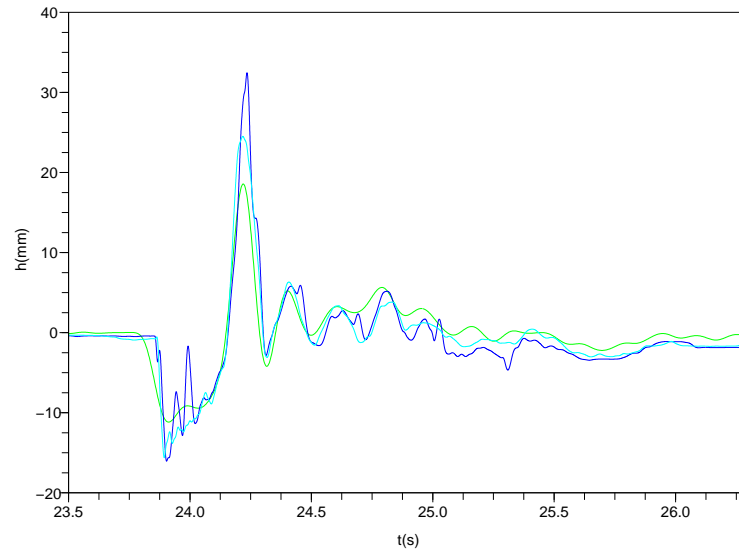


FIG. 7.8 – Comparaison du signal temporel issu des accéléromètres (central : bleu foncé ; tribord : bleu clair) à la dérivée seconde du signal KRYPTON correspondant (vert)

Mesure de pression (2 voies)

Les flotteurs sont constitués de 3 compartiments isolés par des clapets antiretour. Pour chacun des ballons, un capteur de pression est vissé sur le bouchon de la valve de dégonflage du compartiment central de manière à mesurer la pression à l'intérieur. Les capteurs utilisés (cf. figure 7.9) ont une bande passante limitée (1.5 kHz). La fréquence d'acquisition pour ces mesures est de 4 kHz.



FIG. 7.9 – Capteur de pression utilisé pour mesurer à la fois la pression de gonflage et les variations de pression interne lors de l'impact

Mesure des efforts de liaison (4 voies)

Un flotteur est accroché par deux cordes à un axe qui fait partie du caisson (voir figure 7.4 photo de gauche). La liaison à la partie supérieure du caisson se fait par l'intermédiaire de deux sangles accrochées en deux points fixes sur le caisson. Sur chaque côté, 2 capteurs de force piézo-électriques permettent la mesure des efforts horizontaux au niveau des points de fixation supérieurs (cf fig. 7.10). La fréquence d'acquisition de ces capteurs est de 4 kHz.

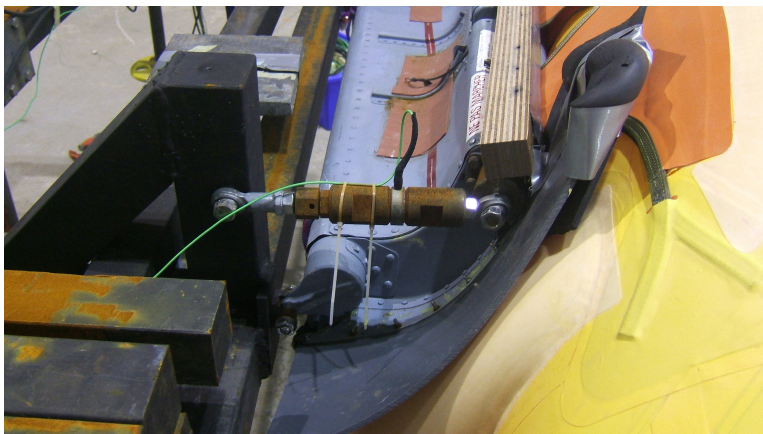


FIG. 7.10 – Capteur de force permettant la mesure des efforts de liaison flotteur-bâti

Déformations des flotteurs

Deux caméras sous-marines à 25 Hz sont disposées sur le plancher au droit de la zone d'impact de chaque flotteur. Pour obtenir une largeur de champ suffisante pour ces caméras, le plancher mobile du bassin est réglé de manière à obtenir une profondeur d'eau de 4,80m. Une troisième caméra à 25 Hz est fixée hors de l'eau, en face de la maquette, sur le pont fixe.

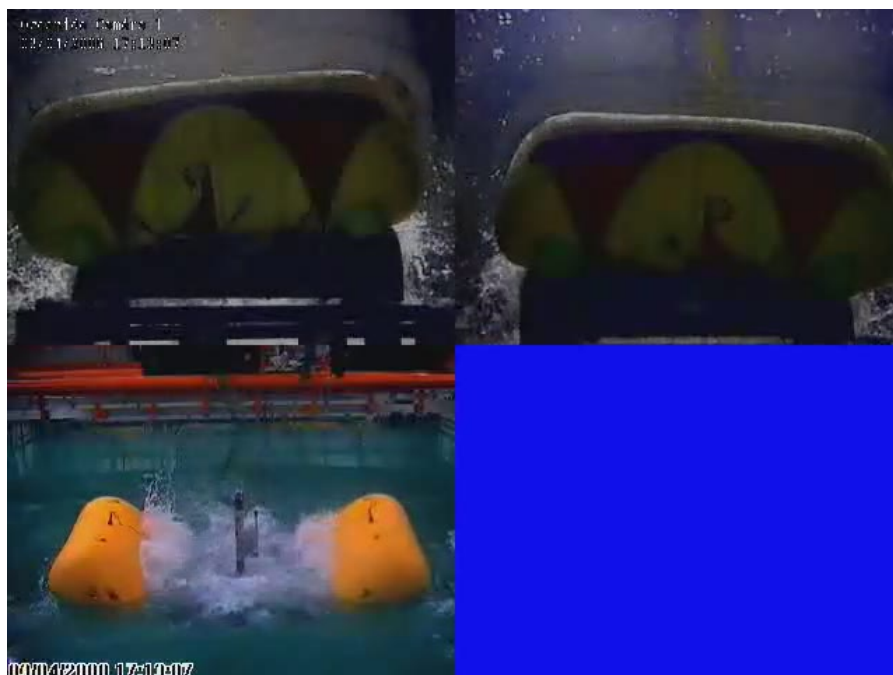


FIG. 7.11 – Visualisation d'un essai à l'aide du dispositif vidéo mis en place.

En figure 7.11, les différentes fenêtres présentent :

- en haut à gauche : une vue de dessous du flotteur bâbord ;
- en haut à droite : une vue de dessous du flotteur tribord ;
- en bas à gauche : une vue de face de l’ensemble de la maquette.

Afin d’éviter des déplacements trop importants et de pouvoir stabiliser la maquette assez rapidement, des lignes d’ancrage horizontales ont été installées aux 4 coins de la maquette. Ces dernières ont un effet négligeable sur la chute de l’ensemble.

Le tableau 7.2.1 donnent la description de ce qui est mesuré sur chaque voie. Par souci de brièveté on se réfère systématiquement au numéro de la voie par la suite.

voie	grandeur mesurée
1	effort avant tribord
2	effort avant bâbord
3	effort arrière tribord
4	effort avant bâbord
5	accélération arrière tribord
6	accélération arrière bâbord
7	accélération centre
8	pression bâbord
9	pression tribord

voie	grandeur mesurée par Krypton
K1	translation selon x
K2	translation selon y
K3	translation selon z
K4	roulis
K5	tangage
K6	lacet

En pratique, la fréquence d’acquisition est trop faible pour donner des informations pertinentes sur les déformations des flotteurs. L’enregistrement du comportement global de la structure est néanmoins intéressante pour la compréhension qualitative des phénomènes mis en jeu.

7.3 Résultats

Un tableau récapitulatif (tableau 7.1) de tous les essais est fourni. Seuls les essais validés sont répertoriés ici. Une liste exhaustive des essais est présentée dans [FIRST, 2008]. Dans un premier temps, des essais avec des vitesses de descente constantes ont été réalisés à l’aide du pont. Les premiers à vitesse “lente” ($10.6 \times 10^{-3} \text{ m/s}$), les autres à vitesse “rapide” ($60 \times 10^{-3} \text{ m/s}$). Ces essais permettent de mesurer les efforts et les surpressions dans les ballons au cours de l’immersion afin de s’assurer notamment de la résistance de la maquette.

Une étude paramétrique a ensuite été menée. La maquette est alors laissée en chute libre et les paramètres suivants sont modifiés :

- hauteur des lâchers : flotteurs immergés dans un premier temps, puis émergés ;
- pression dans les flotteurs ;
- assiette et gîte de la maquette.

La distance entre la surface libre et le niveau inférieur des flotteurs lorsque la maquette est en flottaison permet de fixer H . La hauteur de lâcher indiquée pour les flotteurs émergés dans le tableau récapitulatif correspond à la distance h entre le niveau inférieur des flotteurs et la surface libre.

7.3.1 Essais réalisés

Ref.	Fichier	p	h	α	δ	Commentaires
1	03041417.a08	200	0	0	7	descente lente
2	03041428.a08	200	-H/2	0	7	descente rapide
3	03041505.a08	200	0	0	7	_____
3b	03041519.a08	200	0	0	7	_____
4	03041629.a08	200	-3H/4	0	7	
5	03041640.a08	200	-H/2	0	7	
6	03041712.a08	200	-H/4	0	7	
6b	04041210.a08	200	-H/4	0	7	
8b	04041639.a08	200	-H/2	0	0	mise au point du positionnement KRYPTON
9	04041716.a08	200	-H/4	0	0	
10	07041244.a08	200	-H/2	0	0	influence de la pression interne et de la vitesse initiale pour de faibles hauteurs de chute
11	07041254.a08	200	-H/4	0	0	
12	07041306.a08	200	0	0	0	
13	07041554.a08	150	-H/2	0	0	
14	07041610.a08	150	-H/4	0	0	
15	07041623.a08	150	0	0	0	
16	07041724.a08	100	-H/2	0	0	
17	07041735.a08	100	-H/4	0	0	
18	07041747.a08	100	0	0	0	
18b	08040900.a08	100	0	0	0	répétition des essais de la veille - condition climatiques différentes
19	08041008.a08	200	0	0	0	
20	08041028.a08	200	5	0	0	
20b	08041132.a08	200	5	0	0	influence de la vitesse d'impact pour des hauteurs de chute importantes
21	08041229.a08	200	10	0	0	
21b	08041249.a08	200	10	0	0	
21c	08041358.a08	200	10	0	0	
22	08041603.a08	200	15	0	0	
23	08041616.a08	200	20	0	0	
24	08041659.a08	200	10	4.35	0	influence d'une assiette non nulle
24b	09040915.a08	200	15	4.35	0	
25	09040932.a08	200	20	4.35	0	
26	09041005.a08	200	10	4.35	0	
27	09041052.a08	200	-	0	0	descente par paliers
28	09041103.a08	200	0	0	0	tests complémentaires
29	09041111.a08	200	0	0	0	
30	09041147.a08	200	30	0	0	
31	09041202.a08	200	-	-	-	détection des fréquences propres

TAB. 7.1 – Tableau récapitulatif des essais réalisés et validés. Caractéristiques en terme de pression interne (p), hauteur de chute (h), assiette (α) et angle de gîte (δ)

7.3.2 Essais préliminaires

Répétitivité de l'essai $h=10\text{cm}$ / $p=200\text{mbar}$

Dans ces conditions, 3 essais sont successivement effectués. Les résultats sont présentés en figure 7.12

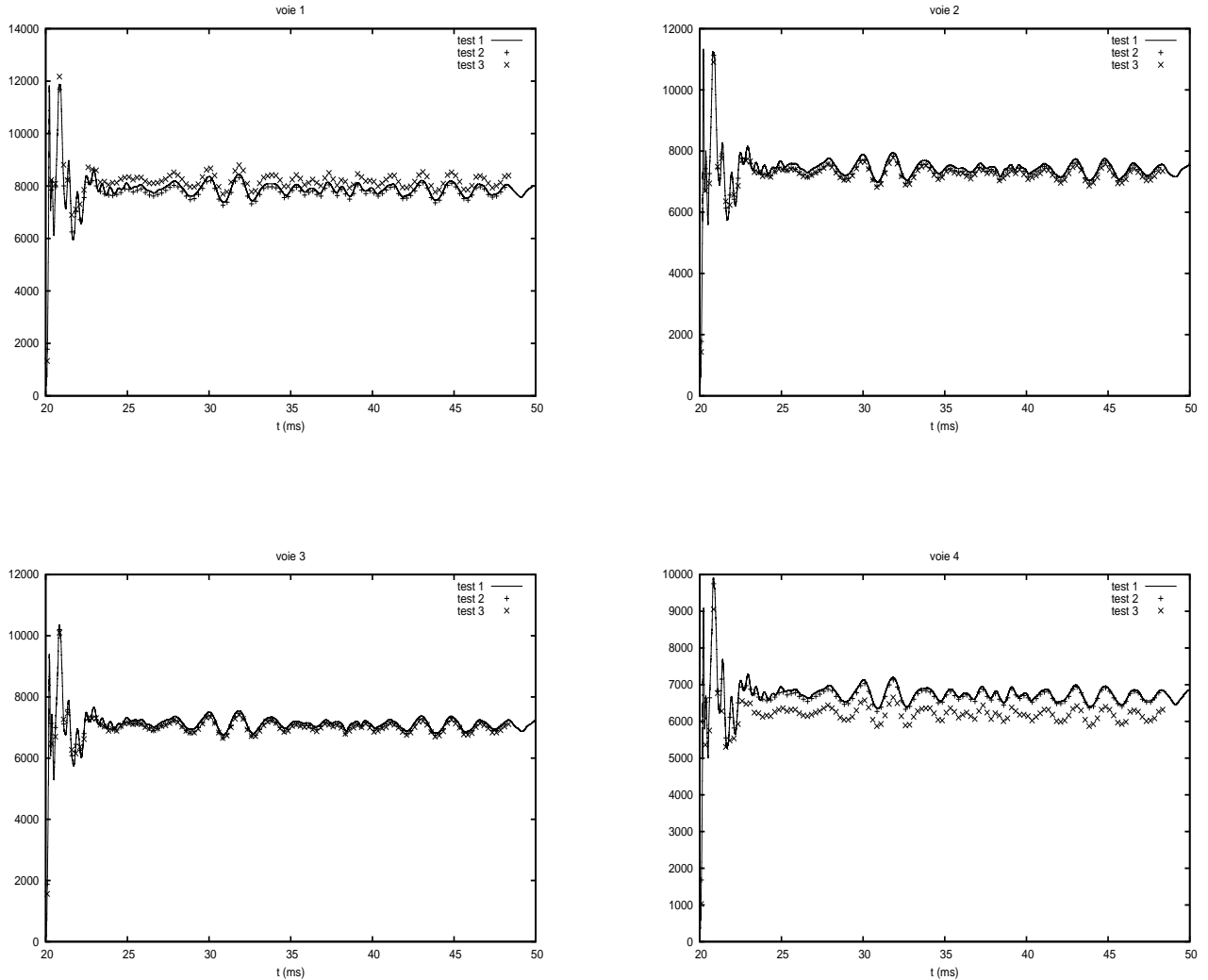


FIG. 7.12 – Répétitivité sur les voies 1 à 4 du même essai réalisé trois fois

La répétitivité semble correcte même si, lors d'un même test (test 3), les signaux issus des voies 1 et 4 présentent des différences avec les deux tests précédents. Ces différences portent uniquement sur l'amplitude du signal et sont de l'ordre de 8%. Par ailleurs, les signaux sont parfaitement en phase. Sur les voies 2 et 3, ce problème d'amplitude n'apparaît pas. Ce problème s'explique par une gîte non nulle comme le montre la figure 7.13. Il conviendra donc d'être attentif à ce paramètre par la suite.

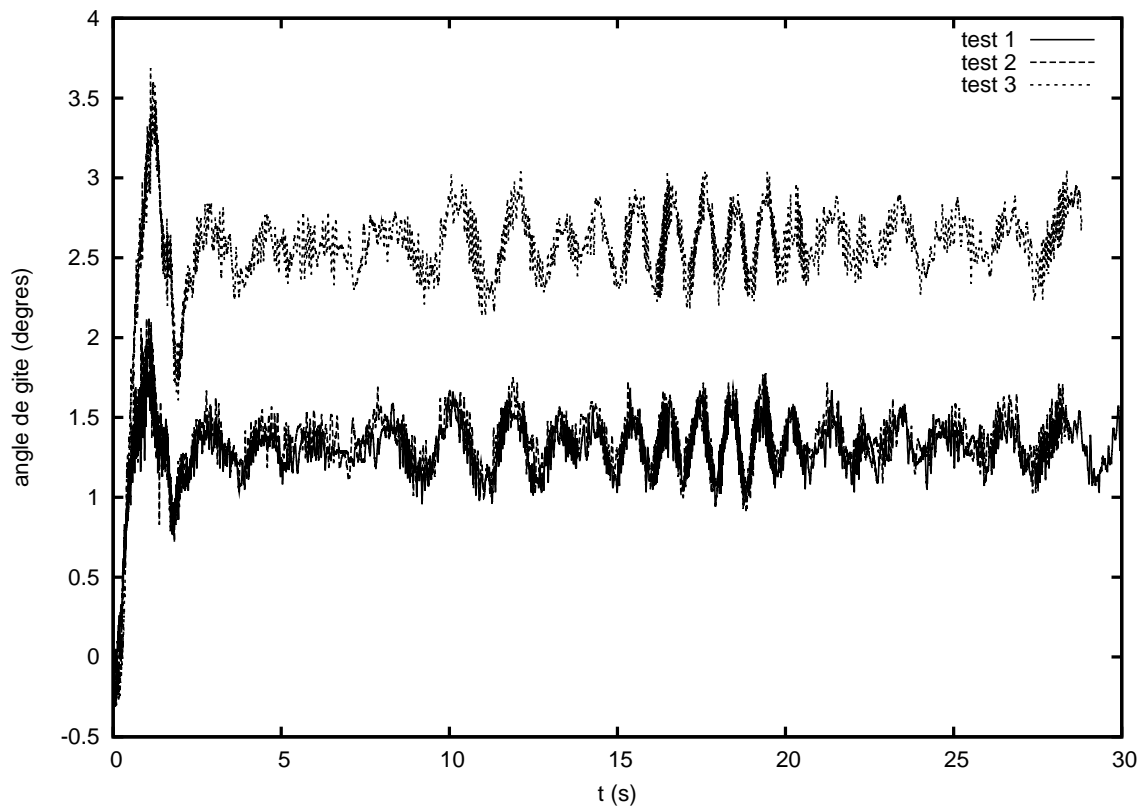


FIG. 7.13 – Angle de gîte au cours de trois essais successifs (voie K4)

Lors des tests 1 et 2, l'angle de gîte est de l'ordre de 1.25° . Lors du test 3, il est de 2.5° . Il faut noter la difficulté à obtenir un angle de gîte rigoureusement nul. Le système de largage est certainement en cause dans ce problème. On constate en revanche que, malgré cette différence sur l'angle de gîte, la réponse est la même à une moyenne près. Cela signifie que la gîte n'est pas corrigée au cours de la pénétration. L'angle de gîte oscille autour de sa valeur initiale. La grande inertie de la maquette et la faible durée du phénomène d'impact explique ce comportement.

Répétitivité d'un jour à l'autre

Le présent test, dont les résultats sont présentés en figure 7.14, met en évidence la bonne répétitivité des essais d'un jour sur l'autre malgré des conditions climatiques différentes (sec le premier jour et très humide le second). Il s'agit d'un aspect important, étant donné que la campagne d'essai se déroule sur plusieurs jours.

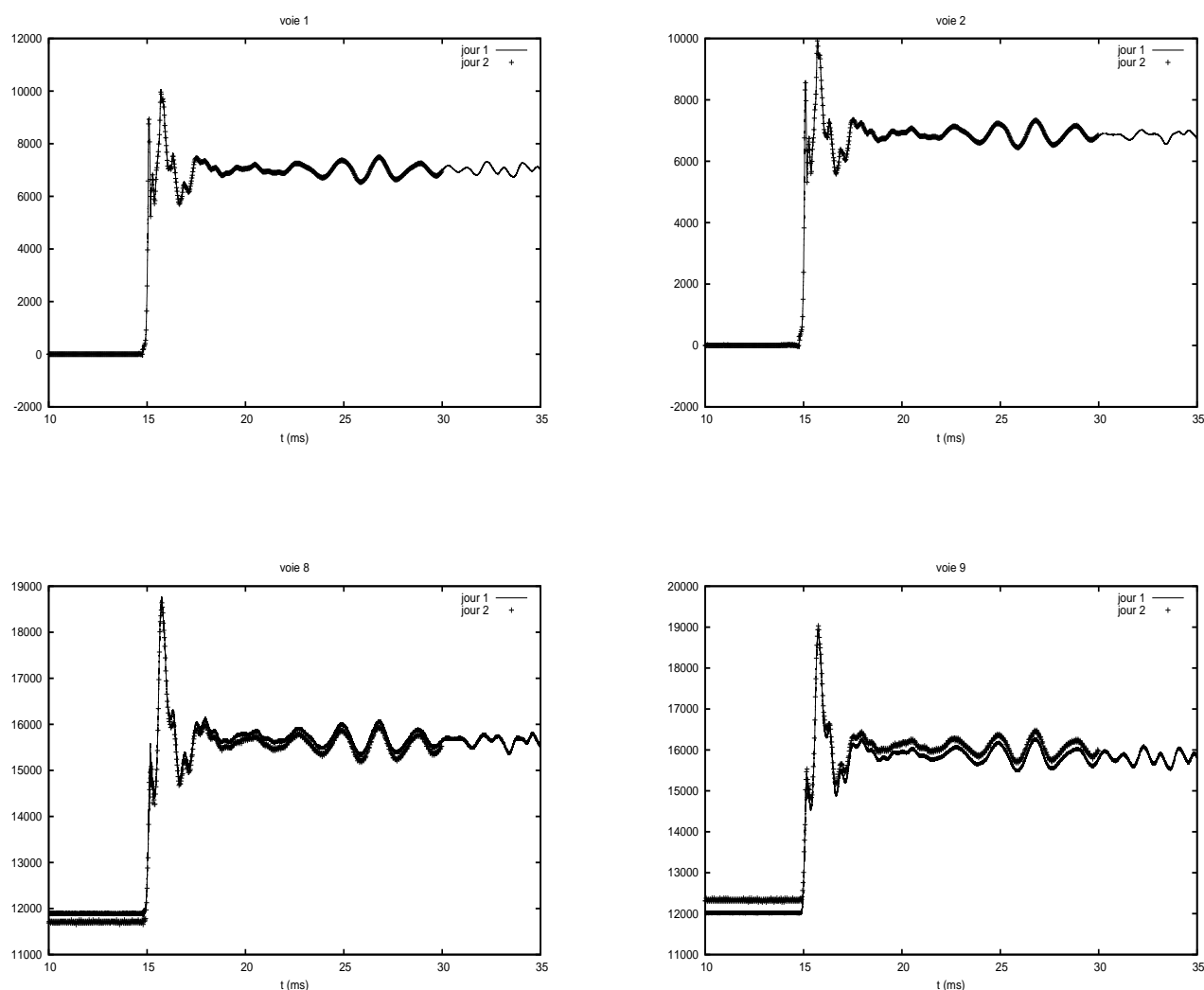


FIG. 7.14 – Répétitivité des essais d'un jour sur l'autre avec des conditions climatiques différentes (sec jour 1, humide jour 2)

La différence qui apparaît sur la pression est uniquement due à un manque de précision lors du gonflage. Les ballons ont en effet été regonflés entre les deux essais pour retrouver la même pression interne le jour 2 par rapport au jour 1.

7.3.3 Etude descriptive

La pénétration dans l'eau de la maquette est décomposée en 8 étapes importantes. Chacune de ces étapes est représentée en figure 7.15. Les images se lisent de gauche à droite et de haut en bas.

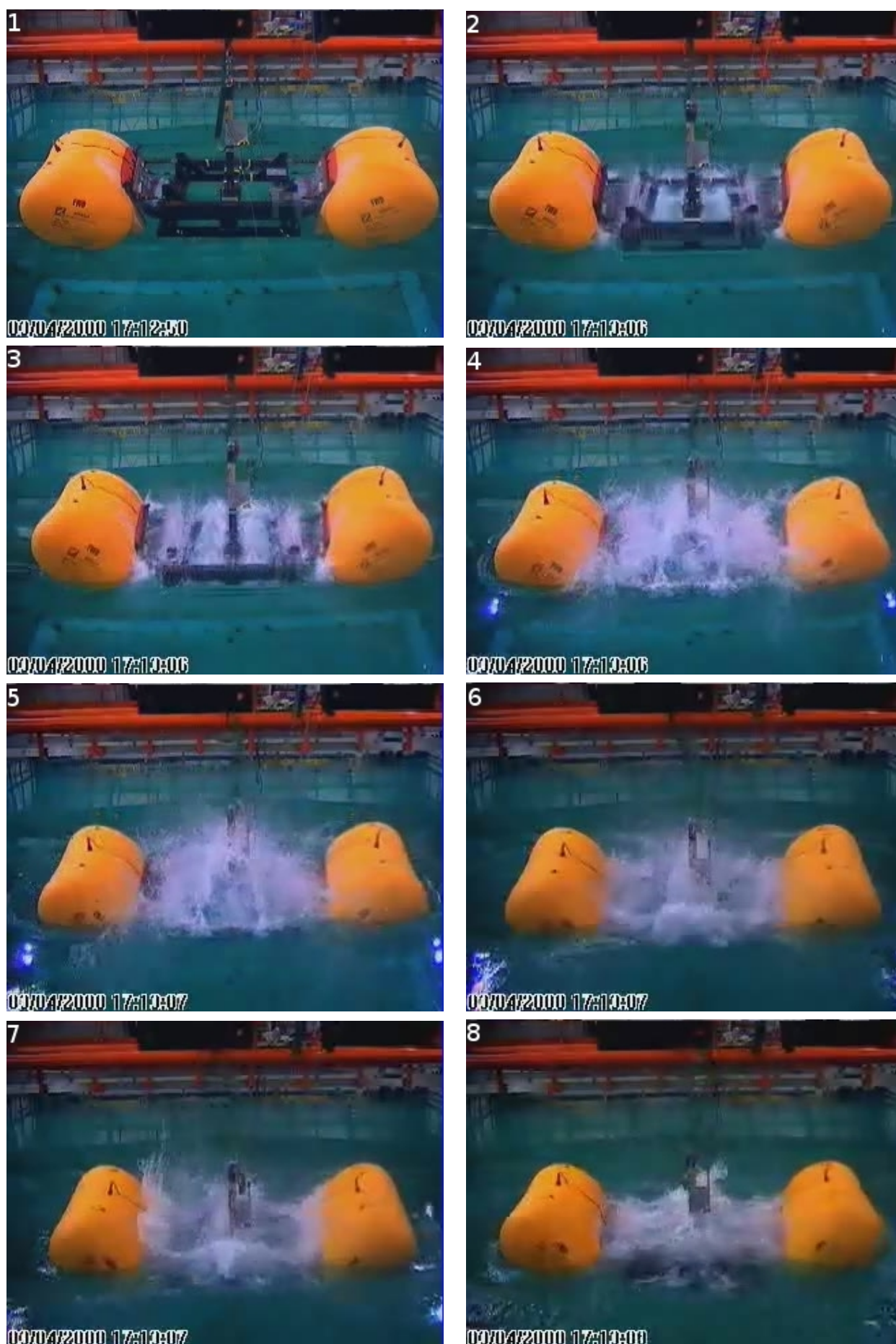


FIG. 7.15 – Décomposition de la pénétration dans l'eau de la maquette

Chaque étape peut être corrélée à une modification de la cinématique ou des chargements hydrodynamiques comme le montre la figure 7.16.

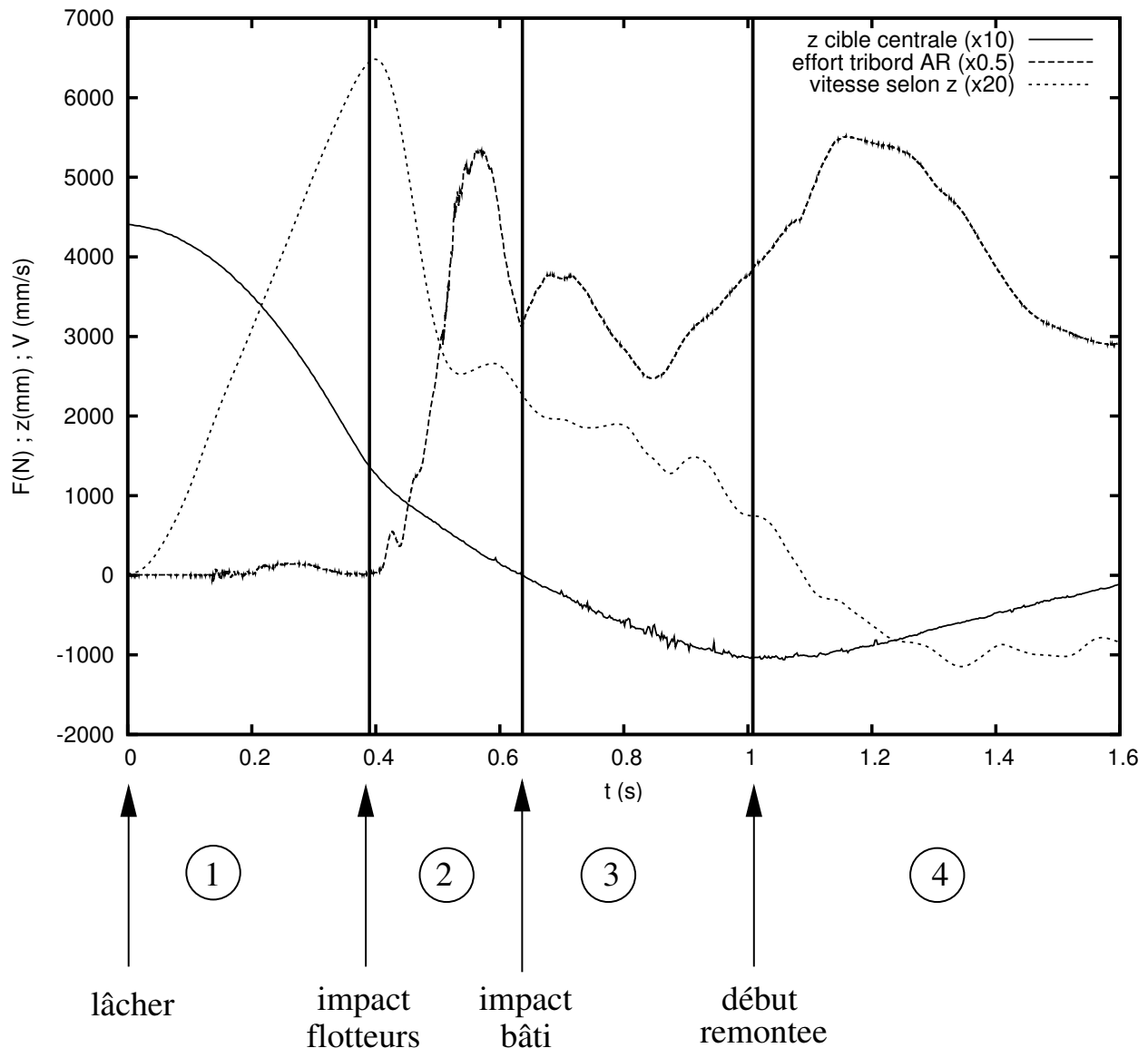


FIG. 7.16 – Cinématique et histoire de la pression interne et des efforts de liaisons au cours du temps et mise en évidence des différentes étapes du phénomène

Sur cette figure, on peut distinguer 4 étapes, délimitées par des traits verticaux :

- Etape 1 : A partir du moment où l'on effectue le lâcher, l'ensemble flotteur-bâti chute librement dans l'air (image 1 de la figure 7.15). Pendant cette phase, les flotteurs pivotent sur leur axe sous l'effet de l'écoulement de l'air. Il en résulte des efforts non nuls dans les liaisons avec le bâti. Ces efforts sont néanmoins négligeables (facteur 100) par rapport aux efforts qui apparaîtront par la suite dans la phase d'immersion.
- Etape 2 : La courbe du mouvement selon z change de pente au moment où les ballons touchent l'eau (image 2). Le mouvement n'est en effet plus uniformément accéléré comme durant l'étape 1. Ce moment se traduit par un premier pic des efforts. Au cours de cette phase, les ballons pivotent autour de l'axe de fixation pour échapper à une partie des contraintes. Les efforts de liaison diminuent donc. Le moment où le bâti touche l'eau (image 3) correspond au moment où les flotteurs ont tourné au maximum autour de leur

axe. Ils transmettent alors une contrainte importante au bâti via les liaisons. Un nouveau maximum des efforts de liaison est alors observé.

- Etape 3 : Les efforts diminuent ensuite, alors que la pénétration des ballons et du bâti continue (image 4). Dans le même temps, les ballons s'écartent lentement du bâti, jusqu'à ce qu'ils aient atteint leur immersion maximum (image 5). Le bâti continue alors à s'enfoncer tandis que les flotteurs rentrent à nouveau en rotation (image 6) pour venir en contact avec le bâti (image 7). Un nouveau maximum des efforts est alors atteint.
- Etape 4 : Le bâti commence à remonter (image 8) et les ballons à s'écarter. S'ensuit une phase de tranquillisation où les flotteurs oscillent dans un mouvement de rotation autour de leur axe. Le bâti oscille également dans un mouvement de pilonnement. Cette phase n'est pas représentée ici. Elle est présentée plus en détail figure 7.18.

Au cours de l'impact, les efforts transmis au bâti sont complètement corrélés aux variations internes de pression du ballon comme le montre la figure 7.17. Cela tend à montrer que la surpression due à l'impact est entièrement et immédiatement transmise au gaz contenu à l'intérieur du ballon. En effet, les efforts sont directement liés à cette surpression hydrodynamique. Pour que la pression interne varie comme les efforts, il faut donc que la membrane soit suffisamment fine et transmette suffisamment vite les contraintes pour que le gaz à l'intérieur soit constamment à l'équilibre avec le fluide au contact du flotteur. Cela n'est toutefois pas le cas aux tout premiers instants de l'impact puisque la pression ne suit pas le premier pic de l'effort. Celui-ci semble intervenir trop rapidement pour que la contrainte soit transmise à l'air contenu dans le ballon.

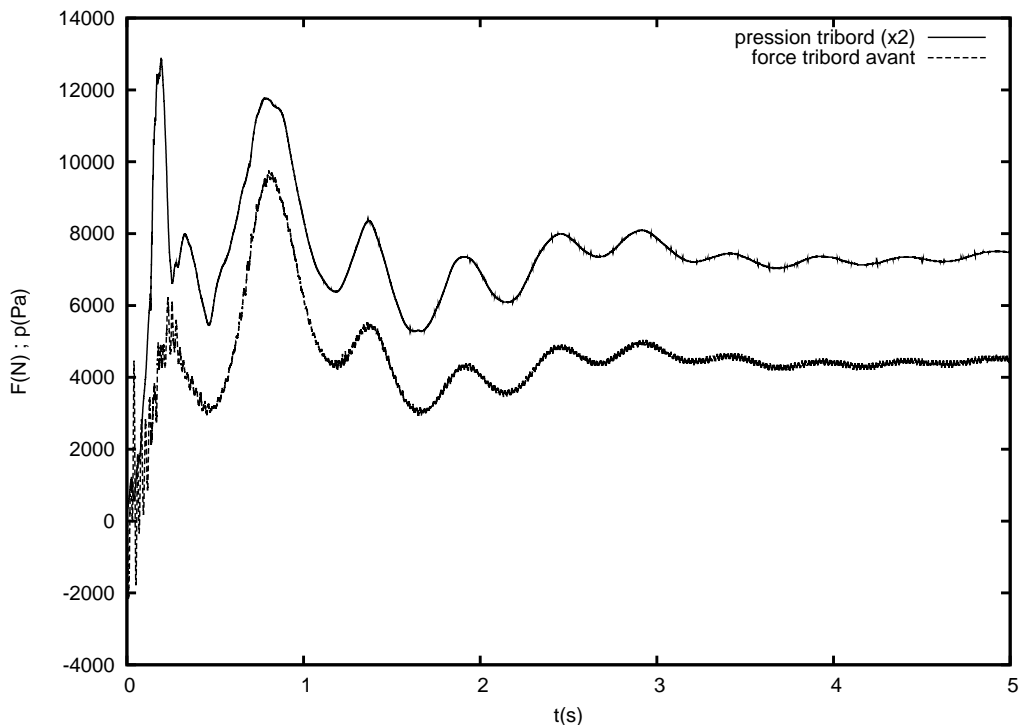


FIG. 7.17 – Corrélation entre la pression interne dans le ballon tribord et l'effort de liaison

Après l'impact, on observe un phénomène de modulation sur les signaux provenant des

capteurs de force (cf. figure 7.18).

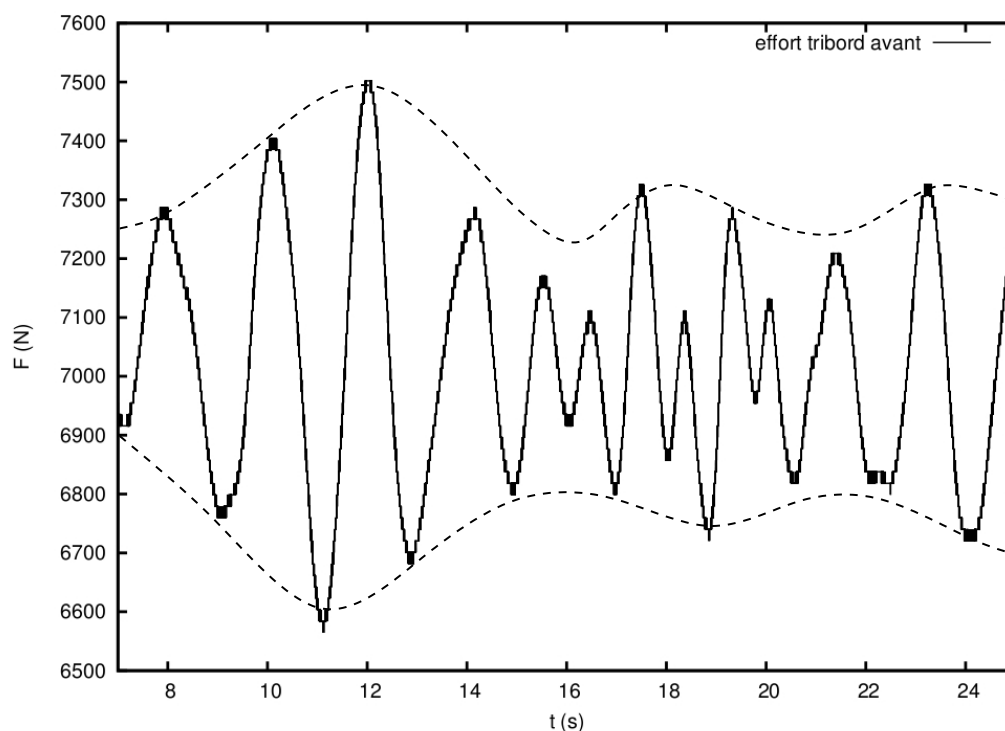


FIG. 7.18 – Phénomène lors de la phase post-impact. Le bâti oscille dans le fluide avec un mouvement de pilonnement (enveloppe) tandis que les flotteurs oscillent dans un mouvement de rotation (porteuse)

L'enveloppe correspond au mouvement de pilonnement de la structure complète qui oscille dans les vagues induites par l'impact. La porteuse correspond elle à un mouvement de vibration des flotteurs, que l'on observe très nettement sur les enregistrements vidéo..

Enfin, si l'on compare les efforts de liaison à l'accélération verticale à laquelle la maquette est soumise aux premiers instants ($t < 1$ s) de l'impact, on constate que ces deux grandeurs sont fortement corrélées (voir figure 7.19). L'accélération tracée en figure 7.19 a été obtenue par double dérivation du signal de la voie K3. On a montré (figure 7.8) que cette manière de procéder était en accord avec les données issues des accéléromètres. On vérifie en figure 7.19 que l'impact intervient bien dès lors que les 30 cm de chute dans l'air ont été parcourus par la maquette. On note que cette chute ne s'effectue pas librement pendant toute sa durée (un peu moins de 0.4 s). En effet, au bout d'environ 0.3 s, l'accélération n'est plus uniforme. Outre les frottements de l'air qui ne sont pas négligeables vu les dimensions de la maquette, il est possible que la proximité de la surface libre joue un rôle. Les flotteurs touchent alors la surface libre. La décélération devient très importante par rapport à la gravité. Au bout d'un dixième de seconde, celle-ci redevient prédominante, jusqu'à ce que le bâti touche l'eau à son tour, entraînant à nouveau une augmentation de la force hydrodynamique pendant un temps plus court (de l'ordre de 5 centièmes de secondes). La gravité redevient prédominante au bout de 3.5 dixièmes de seconde environ. L'accélération change alors de signe et la maquette commence

à remonter sous l'effet de la poussée d'Archimède.

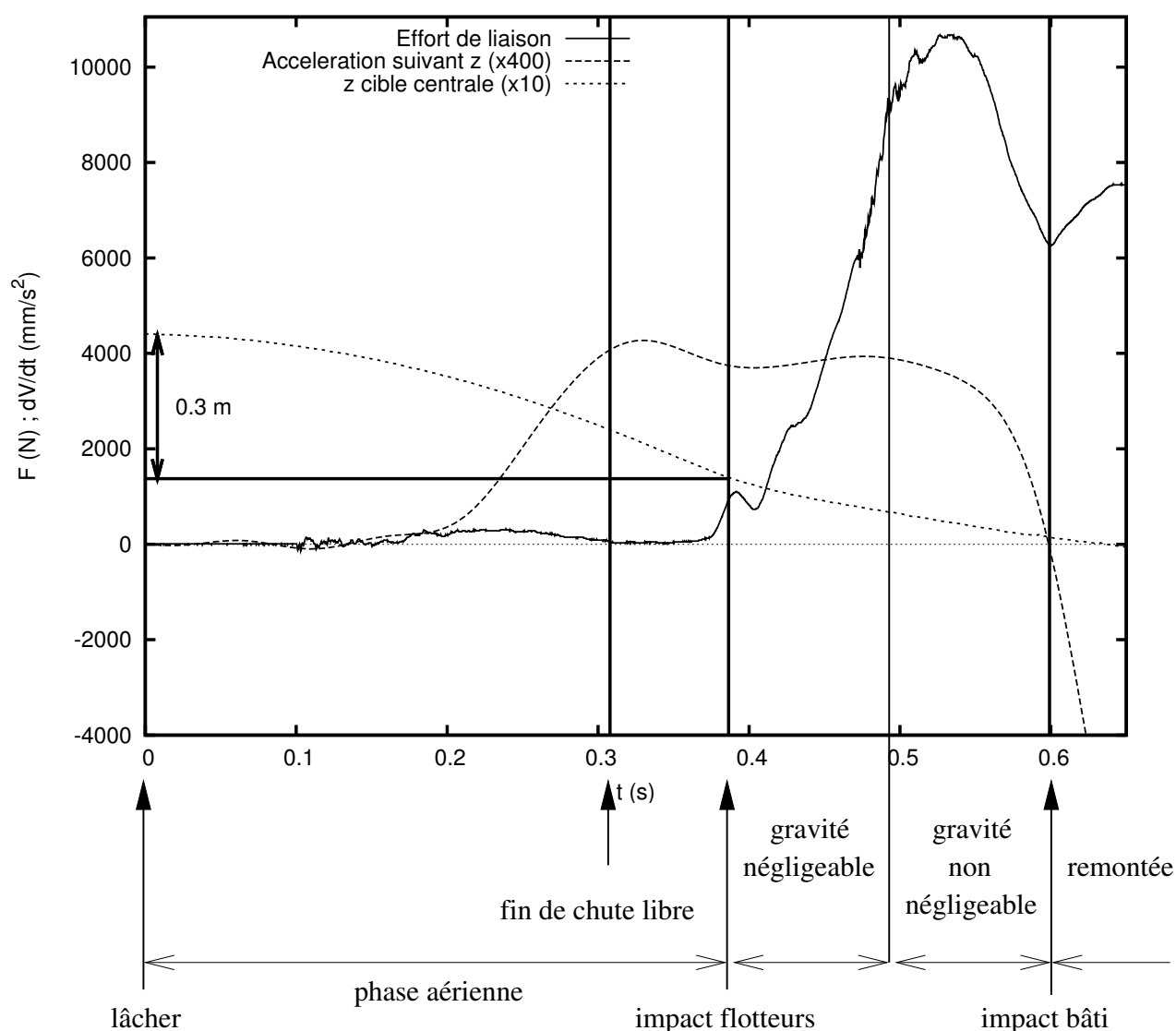


FIG. 7.19 – Corrélation entre l'accélération verticale et les efforts de liaison

7.3.4 Etude des variabilités

Variabilités liées à la pression interne

Pour étudier les variabilités liées à la pression interne, on considère l'impact à $h = 0$ (ballon initialement à fleur d'eau). La pression interne est successivement prise égale à 100, 150 et 200 mbar. L'évolution temporelle des efforts de liaison aux premiers instants de la pénétration est représentée en figure 7.20 pour trois valeurs différentes de la pression interne. Quelle que soit la voie considérée (en terme de capteur de force) les résultats sont identiques. La figure 7.20 ne montre donc que le signal issu de la voie 3.

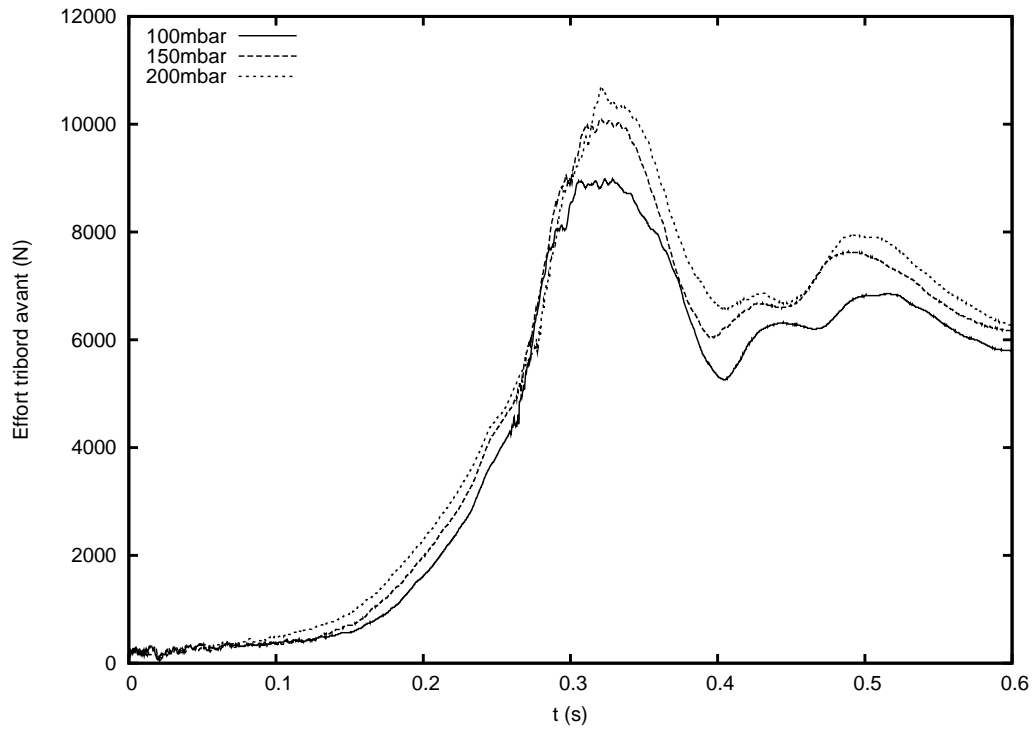


FIG. 7.20 – Influence de la pression interne sur les efforts de liaison aux premiers instants de la pénétration

Les efforts transmis sont d'autant plus importants que la pression interne est élevée. On pouvait s'attendre à ce résultat puisque les ballons, plus gonflés, se déforment moins et absorbent donc moins d'énergie lors de l'impact. On observe que le contenu fréquentiel de l'effort ne change pas avec la pression interne. Pour les trois pressions internes considérées, le spectre de l'effort présente un premier pic très marqué aux alentours de $0.6Hz$, puis un second à $2.1Hz$. On effectue un essai, structure hors de l'eau, pour récupérer les fréquences des modes secs. La réponse à un choc sur l'un des ballons est enregistrée et fait apparaître les fréquences propres suivantes :

f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
0.95 Hz	1.5 Hz	2.63 Hz	3.6 Hz	40 Hz	150 Hz	250 Hz	350 Hz

Les fréquences obtenues ne correspondent pas à celles qui sont excitées lors des essais d'impact. On peut raisonnablement penser que les modes mouillés ont des fréquences de vibrations différentes.

Influence de la hauteur de chute

Pour étudier l'influence de la hauteur de chute, on règle l'assiette à 0° et la pression à 200 mbar. 8 hauteurs de chute sont considérées : $h=30\text{cm}$, 20cm , 15cm , 10cm , 5cm , 0cm , $H/4$ et $H/2$. Les résultats en termes de maximum des efforts sont représentés en figure 7.21.

en pratique, il s'agit toujours du premier maximum (voir figure 7.16), correspondant donc à l'impact des flotteurs.

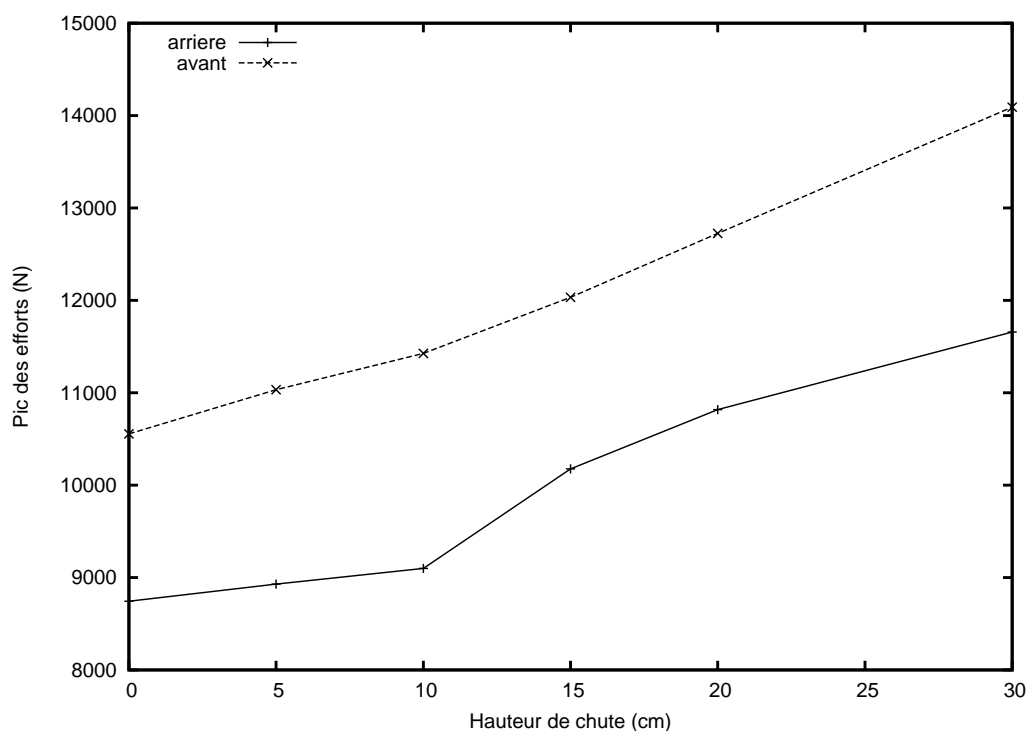


FIG. 7.21 – Influence de la hauteur de chute sur le maximum des efforts de liaison

La variation du pic des efforts avec la hauteur de chute est quasi linéaire. La valeur pic varie donc comme le carré de la vitesse d'impact, ce qui semble raisonnable. En effet, si on approche l'effort F par $\frac{dM_a}{dt}$, on montre que $F \sim 2\rho\pi RV^2$. Il serait intéressant de corréler les efforts avec le volume immergé mais la faible fréquence d'acquisition des caméras et leur définition ne permet pas d'obtenir la variation temporelle de ce volume.

L'augmentation de la valeur du pic des efforts est de l'ordre de 15% lorsque l'on double la hauteur de chute (de 10 à 20 cm par exemple). Cette faible augmentation est due au fait qu'une grande partie de l'énergie est absorbée par les ballons qui se déforment.

Influence de l'assiette

Lorsque l'assiette est nulle, les efforts sont plus importants à l'avant, ce qui est lié au fait que le montage n'est pas symétrique avant-arrière. Les ballons sont plus rapprochés du bâti à l'avant (cf. schéma de la figure 7.22).

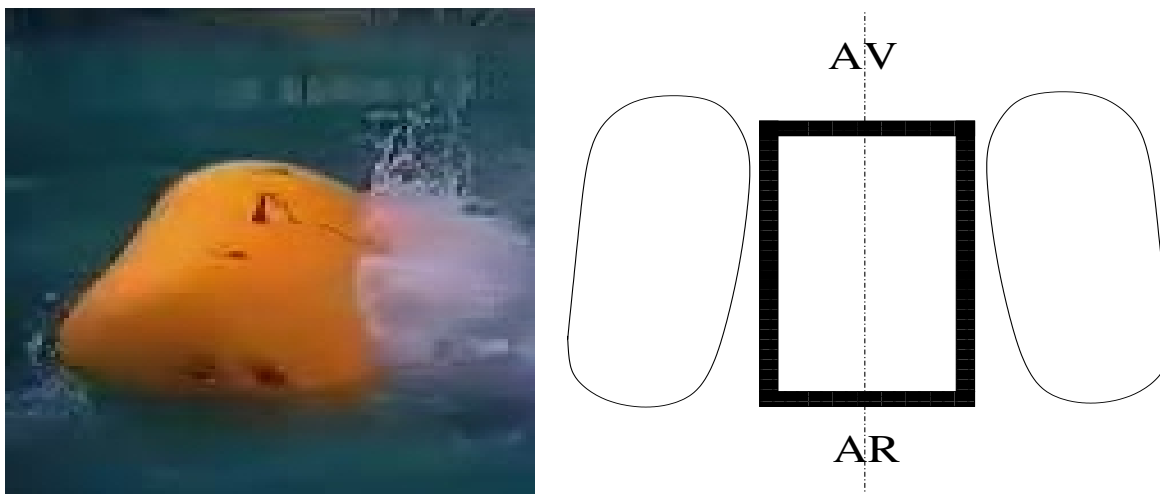


FIG. 7.22 – Effets de la disymétrie avant arrière

Ce resserrement de l'interstice entre bâti et flotteur, est visible si l'on observe le jet qui en est issu. Celui ci monte en effet plus haut à l'avant qu'à l'arrière, comme le montre la figure 7.22. Lorsqu'on introduit une assiette, l'arrière de la maquette pénètre en premier lors de l'impact. Les efforts à l'arrière augmentent mais les efforts à l'avant également, comme le montre la figure 7.23.

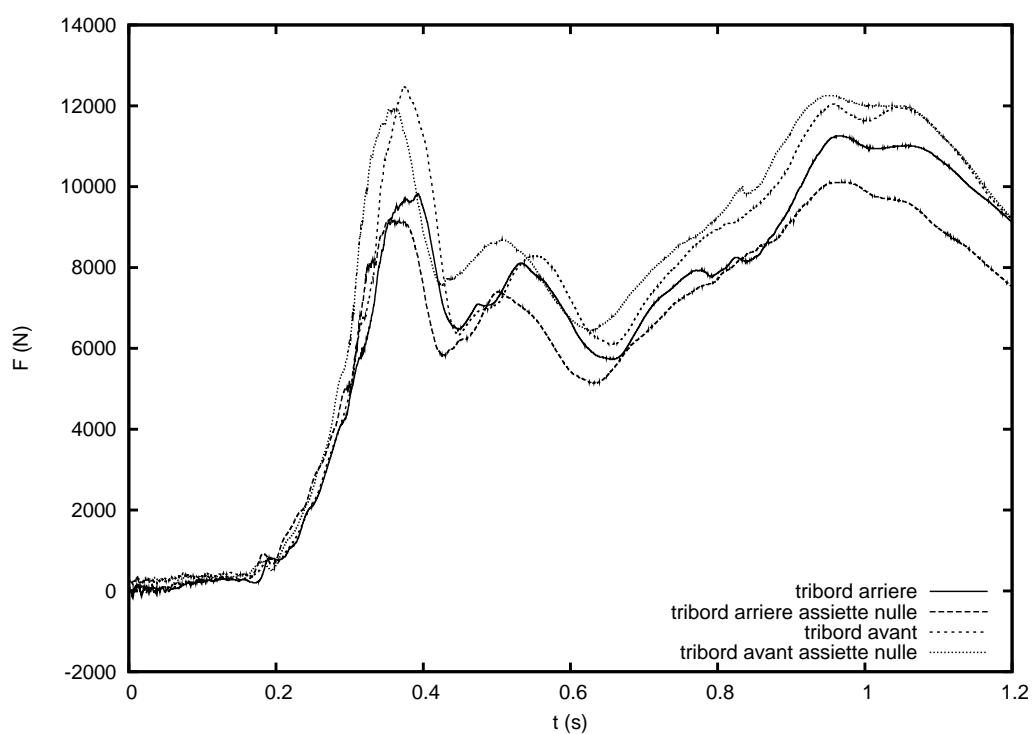


FIG. 7.23 – Influence de l'assiette sur les efforts de liaison

7.4 Comparaison à des modèles théoriques d'impact

Dans cette partie, la forme des deux flotteurs est approchée par deux cylindres circulaires parallèles. Seuls les premiers instants de l'entrée dans l'eau de la maquette, correspondants en fait à l'impact des flotteurs, sont modélisés. En pratique, on ne considère pour les calculs, qu'une section de flotteur. Les chargements sur l'ensemble d'un flotteur sont obtenus grossièrement, en multipliant simplement l'effort sur la section par la longueur totale du cylindre.

7.4.1 Modèle de Wagner linéarisé - solution analytique (SA)

La fonction de forme d'un cylindre de rayon R s'écrit :

$$f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}. \quad (7.1)$$

Elle peut être approchée par

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2R}. \quad (7.2)$$

La correction mouillée $a(t)$ est alors calculée en substituant (7.2) dans la condition de Wagner qui s'écrit :

$$\int_0^{\pi/2} f(a(t) \sin \theta) d\theta = \frac{\pi}{2} h(t). \quad (7.3)$$

On obtient alors :

$$a = \sqrt{4Rh}; \quad \frac{da}{dt} = \frac{2R\dot{h}}{\sqrt{4Rh}}. \quad (7.4)$$

Par ailleurs, la masse ajoutée est donnée par

$$M_a = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 = 2\pi \rho R h, \quad \text{d'où} \quad \dot{M}_a = \rho \pi a \dot{a} = 2\pi \rho R \dot{h} \quad (7.5)$$

d'où l'on déduit l'expression des efforts hydrodynamiques

$$F = M \frac{dV}{dt} = g - \frac{d(M_a V)}{dt} = g - M_a \dot{V} - \dot{M}_a V. \quad (7.6)$$

Par intégration de (7.6), on montre que la vitesse de pénétration vérifie :

$$V(t) = \frac{M(V_0 + gt)}{M + M_a} \quad (7.7)$$

Le modèle hydrodynamique ne prend pas en compte les effets de la gravité. Celle ci est rajoutée artificiellement dans la loi de Newton 7.6 dans le but d'améliorer la prédiction de la cinématique. Si on néglige l'influence de la gravité sur la cinématique, la profondeur de pénétration $h(t)$ vérifie l'EDO :

$$\begin{cases} \dot{h} \left(1 + \frac{2\pi\rho R}{M} h \right) = V_0, \\ h(0) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

Cette EDO se résout en :

$$h(t) = \frac{M}{2\pi\rho R} \left(\sqrt{1 + 4V_0 \frac{\pi\rho R}{M} t} - 1 \right). \quad (7.9)$$

On en déduit :

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1 + \frac{4\pi\rho R V_0 t}{M}}}, \\ \ddot{h}(t) = -\frac{2\pi R \rho V_0^2}{M \left(1 + \frac{4\pi\rho R V_0 t}{M}\right)^{3/2}}. \end{cases} \quad (7.10)$$

Ce modèle n'est néanmoins pas adapté au problème. En effet, la gravité joue un rôle non négligeable sur la cinématique, comme le montre en particulier la figure 7.25. Il faut en tenir compte au mieux si l'on souhaite prédire les chargements de manière réaliste.

7.4.2 Solution numérique du modèle de Wagner linéarisé (SN)

Dans le paragraphe précédent, un certain nombre d'approximations sur la forme ainsi que sur la définition de la masse ajoutée ont été effectuées pour pouvoir extraire une solution complètement analytique du problème. On se propose de résoudre le problème de Wagner linéarisé sous une forme moins approchée. [Taylor, 1930], donne l'expression suivante pour la masse ajoutée d'un cylindre de rayon R :

$$M_a = C_a \rho a^2, \quad (7.11)$$

où $a(t)$ est la correction mouillée, *i.e.* la coordonnée horizontale du point de contact entre la surface libre et la surface mouillée

$$C_a = \frac{\pi(\nu^2 + 2)}{3} - 2 \left(\frac{\pi(1 - 1/\nu)}{\sin^2(\pi/\nu)} + \frac{1}{\tan(\pi/\nu)} \right) \quad ; \quad \nu = \frac{\pi/2}{\arctan(a/(R - \sqrt{R^2 - a^2}))} \quad (7.12)$$

Quand $a(t) = R$, $\nu = 2$ et dans ce cas, $C_a = \pi$. On retrouve alors la formule classique pour la masse ajoutée (7.5). Il faut toutefois garder à l'esprit qu'en pratique le modèle de Wagner linéarisé n'est valide que pour de faible pénétration ($h \ll a$). Entre ces deux valeurs, C_a est borné par $3\pi/4$ et π (cf. figure 7.24 (gauche)). Cela signifie que la masse ajoutée qui est prédite dans ce cas est toujours un peu plus faible que précédemment, comme le montre la figure 7.24 (droite).

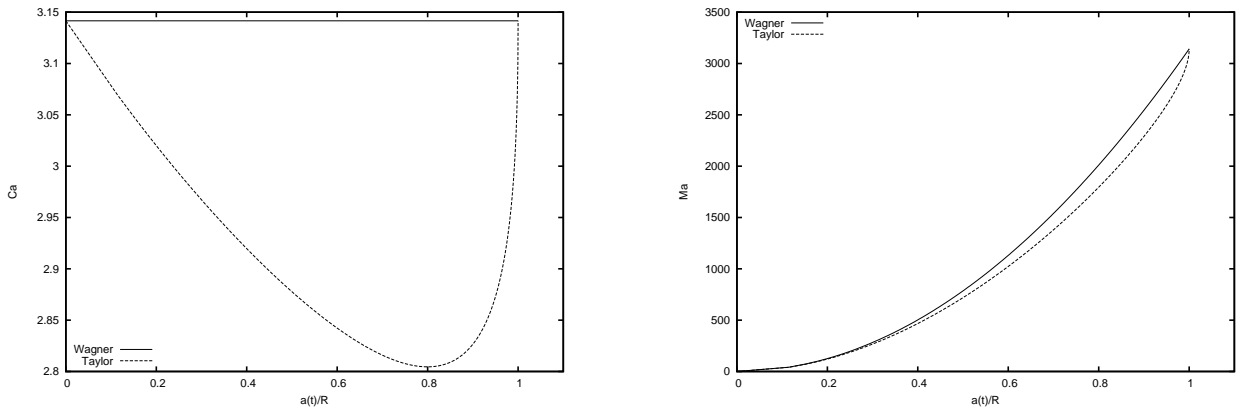


FIG. 7.24 – Coefficient de masse ajoutée C_a (gauche) et masse ajoutée M_a (droite) en fonction de la correction mouillée $a(t)$. Les définitions 7.5 (Wagner) et 7.12 (Taylor) sont utilisées

La correction mouillée est calculée grâce à la formule donnée par [Korobkin, 2004] :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\pi V(t)}{2E'(\alpha)}, \quad \alpha = \frac{a(t)}{R}, \quad (7.13)$$

où $E'(\alpha) = \frac{E(\alpha)-K(\alpha)}{\alpha}$ et $K(\alpha)$, $E(\alpha)$ sont les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce respectivement. Cette solution n'est valable que pour $h \ll a$, c'est à dire pour des corps présentant un faible angle mort. La vitesse de pénétration $V(t)$ vérifie la loi de Newton

$$M \frac{dV}{dt} = -\frac{d(M_a V)}{dt} + Mg, \quad (7.14)$$

où M est la masse totale du système et g l'accélération de la pesanteur. A nouveau, la gravité est rajoutée dans la loi de Newton pour se rapprocher au mieux de la cinématique observée expérimentalement. Elle n'est toujours pas prise en compte dans le modèle hydrodynamique à proprement parler. Le système est alors fermé et peut donc être intégré en temps à l'aide d'un schéma numérique classique.

Modèle de Wagner Généralisé (GW)

Une formulation de Wagner généralisée est utilisée pour étudier le problème. La correction mouillée n'est pas recalculée à proprement parler dans cette approche. L'histoire de celle ci est reconstruite à l'aide de l'histoire de la pénétration, mesurée par Krypton, et de la forme de la section du cylindre impactant. Dans ce cas, la masse ajoutée est donnée en 3.4.3 :

$$M_a = \rho \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n A_n^2. \quad (7.15)$$

Les A_n sont les coefficients de la décomposition en une série de Fourier en θ , de la coordonnée horizontale x le long du contour du corps. Dans ce cas, θ représente la coordonnée azimutale paramétrisant la surface du corps.

Résultats

Les résultats numériques sont recalés sur les résultats expérimentaux à l'aide de la vitesse de chute, en jouant sur le rayon de courbure. La vitesse verticale de chute est obtenue en dérivant le signal Krypton suivant z . A l'instant de contact initial, la vitesse vaut 3.2 m/s, ce qui est inférieur à la vitesse de chute libre $\sqrt{2gh} \sim 5$ m/s.

L'instant de contact initial peut être déterminé en s'intéressant à la position verticale en fonction du temps, *i.e.* au signal issu de Krypton (voie K3). A l'instant de contact initial, cette courbe présente un net changement de pente. Le temps correspondant permet ensuite d'obtenir la vitesse de chute au moment de l'impact. Etant donné la taille du système, on peut penser que c'est le frottement dans l'air qui en est responsable. Au tout début de l'impact, l'attraction de la pesanteur domine par rapport à la force hydrodynamique. Il en résulte que le système continue à être accéléré pendant quelques centièmes de secondes. La vitesse de chute est représentée en figure 7.25. Sur cette figure, la solution 'SA' représente la solution analytique du modèle de Wagner linéarisé, obtenue en (7.7). 'SN' représente la solution obtenue par intégration en temps de (7.14), la masse ajoutée M_a étant obtenue par un modèle de Wagner linéarisé. L'intégration en temps de cette équation, pour des valeurs de la masse ajoutée issues d'un modèle de Wagner généralisé (7.15), fournit la solution 'GWM'. Les résultats de ces trois

modèles sont comparés aux résultats expérimentaux (Exp.). Dans chacun de ces cas, l'histoire de la pénétration correspondante est représentée en figure 7.26.

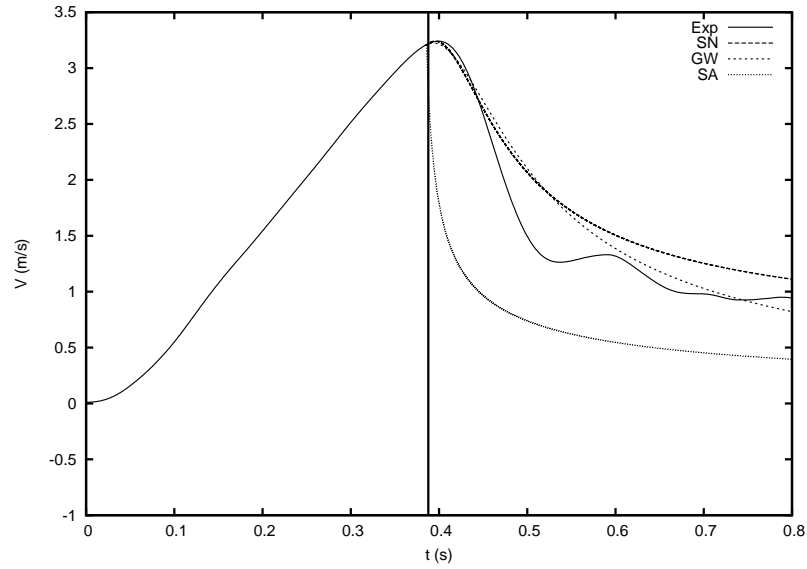


FIG. 7.25 – Vitesse de pénétration du système aux premiers instants. La ligne verticale repère l'instant du contact initial. 'SA' : Solution analytique du modèle linéarisé, 'SN' : Solution numérique du modèle linéarisé, 'GWM' : modèle de Wagner généralisé, 'Exp.' : Résultats expérimentaux

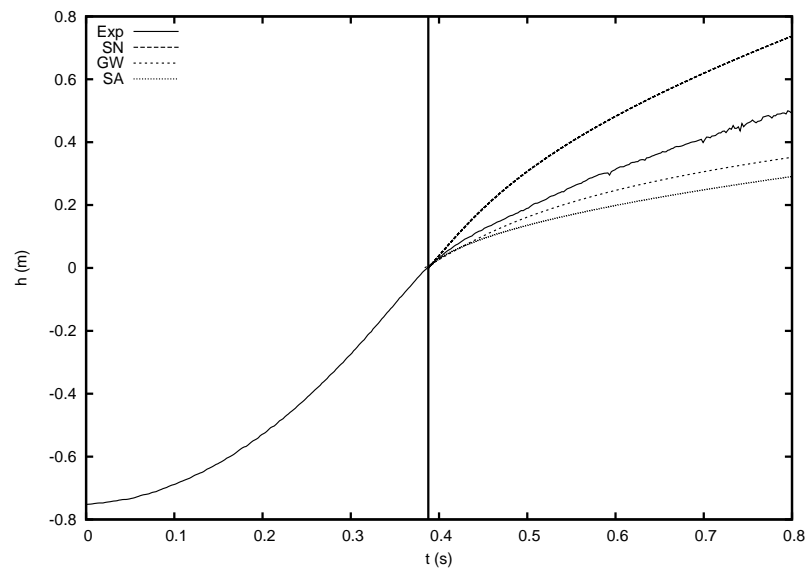


FIG. 7.26 – Histoire de la pénétration aux premiers instants. La ligne verticale repère l'instant du contact initial

L'histoire du chargement hydrodynamique est comparée aux données expérimentales en terme d'effort dans les liaisons en figure 7.27. On note une bonne corrélation entre les deux. En particulier, on montre que l'on est capable de prédire le maximum des efforts. Les fluctuations de fréquence relativement faibles qui apparaissent dans les données expérimentales sont vraisemblablement liées au mouvement des flotteurs par rapport au bâti.

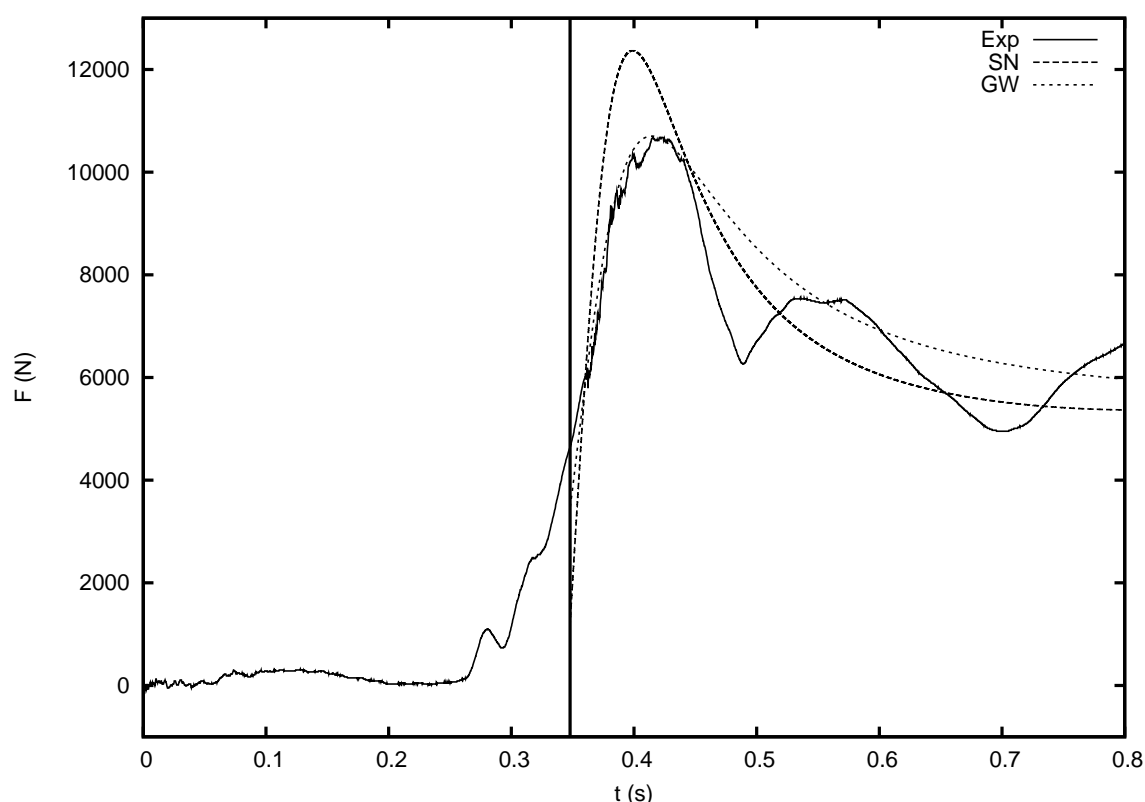


FIG. 7.27 – Comparaison des efforts hydrodynamiques calculés aux efforts mesurés dans les liaisons

La valeur du maximum des efforts lors de l'impact des flotteurs est reportée en table 7.2. Les valeurs obtenues grâce au modèle de Wagner y sont également reportées. Dans le cas du premier modèle, l'erreur commise augmente avec la hauteur de chute. Pour la hauteur de chute maximum considérée, elle est de l'ordre de 15%. Dans le second, c'est le contraire et l'erreur est moindre puisqu'elle est au maximum de 5.33%.

fichier	h (cm)	t_{imp} (s)	F_{mes} (N)	F_{cal} (LW)	err. relative (%)	F_{cal} (GW)	err. relative (%)
07041306	0	11.6442	8306	8048	0.31	8749	5.33
08041132	5	20.9318	9082	8943	1.53	9254	1.89
08041229	10	20.2368	9419	9686	2.83	9607	1.99
08041603	15	23.4585	9662	10255	6.14	9876	2.21
08041616	20	23.2269	10154	11046	8.78	10205	0.5
09041147	30	0.3858	10679	12361	15.75	10706	0.25

TAB. 7.2 – Valeurs du maximum des efforts au cours de l’entrée dans l’eau du dispositif expérimental

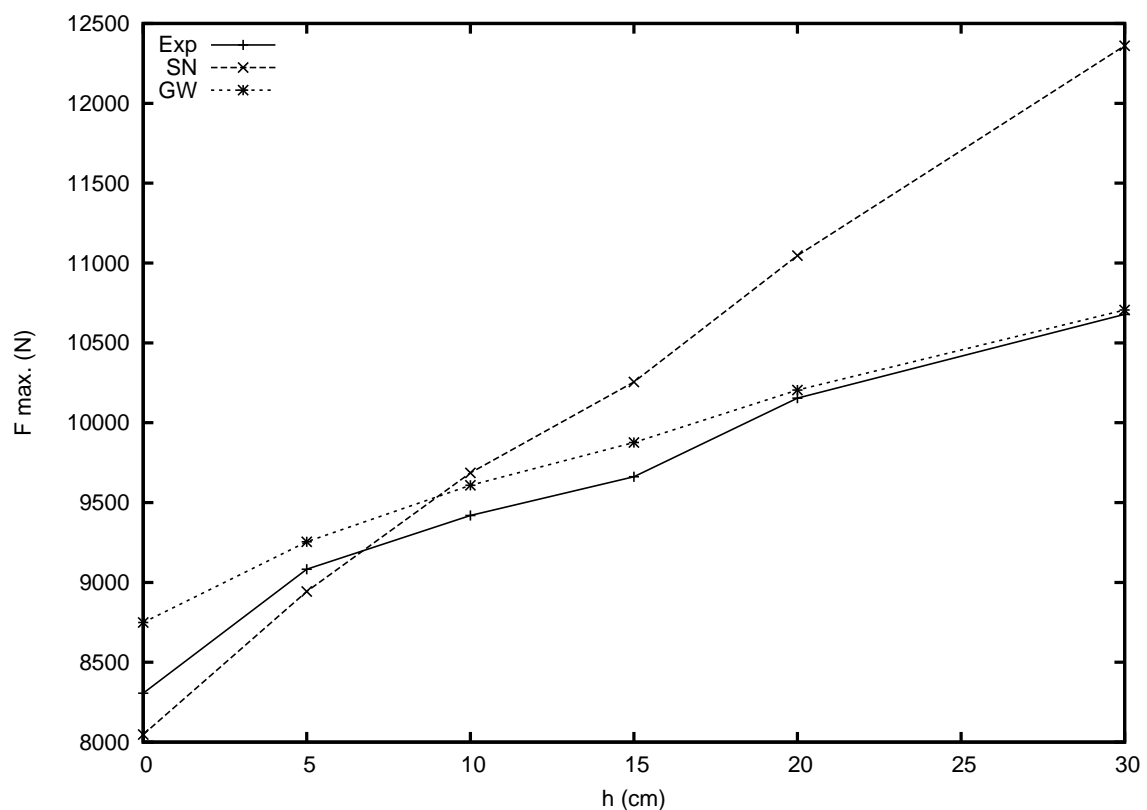


FIG. 7.28 – Comparaison du maximum des efforts calculés par des modèles de Wagner à ceux mesurés dans les liaisons pour différentes valeurs de la hauteur de chute

7.5 Conclusions et perspectives

On a montré ici que grâce à des modèles simples, il est possible de prédire de manière réaliste les efforts encaissés par les flotteurs. Dans ces modèles, les flotteurs sont grossièrement approchés par des cylindres circulaires et supposés rigides. Le peu d’images sous-marines disponibles à chaque essai, ne permet pas de suivre les déformations des flotteurs au cours de l’impact et de quantifier précisément leur importance. Il serait cependant trop simpliste et

précipité d'en déduire que les déformations peuvent être négligées dans les calculs.

En effet, si les efforts globaux semblent peu affectés par les déformations, il n'en va pas forcément de même des chargements locaux. Comme on l'a vu au chapitre 5, si les déformations de la structure induisent localement un angle mort très faible, un pic de pression important est susceptible d'être observé. De part le "lissage" qui s'opère lorsque l'on considère les efforts globaux, qui résultent de l'intégration de la pression le long de la surface mouillée du corps, ce pic de pression peut passer inaperçu. Or, du point de vue du dimensionnement des flotteurs, l'occurrence d'un tel pic de pression est extrêmement importante. Cette pression n'est malheureusement pas accessible à une quelconque mesure. En revanche si l'on parvient à quantifier les déformations, on est capable de corréliser les zones où l'angle mort local est faible à une zone de pression importante.

Dans la perspective d'essais futurs, il serait souhaitable de mesurer précisément les déformations des flotteurs, afin de disposer d'arguments tangibles pour dire si l'on peut raisonnablement négliger ces déformations lors des calculs. Un meilleur système d'acquisition vidéo sous-marin devrait être utilisé dans ce but. Pour être capable d'enregistrer correctement les déformations, on estime que le système vidéo doit être capable de fonctionner à une fréquence d'acquisition d'au moins 250 Hz, au lieu des 25 Hz actuels. Un tel dispositif permettrait en outre de déterminer la position de la ligne de contact. Le volume immergé pourrait alors être mesuré et fournirait un moyen supplémentaire de calcul des efforts (globaux cette fois).

Les essais qui ont été réalisés ont montré une influence des déformations moindres par rapport aux essais sur la sphère élastique présentés au chapitre 6, où leur rôle était primordial. L'étude des variabilités liées à la pression interne donne cependant quelques indices tendant à prouver que le rôle des déformations n'est pas complètement négligeable. En effet, les efforts sont d'autant plus importants que la pression interne et donc la rigidité des flotteurs est élevée. Si elles sont moindres, les déformations des flotteurs ne sont donc pas négligeables puisqu'elles contribuent à amortir l'impact.

Dans le but de gagner en terme de qualité des résultats, un dispositif de largage plus performant éliminerait les mouvements parasites générés par le système actuel. Il permettrait en outre de mieux contrôler l'assiette et la gîte, ce qui n'a pas toujours été le cas dans les essais présentés ici. Enfin, il serait souhaitable d'utiliser un montage présentant une symétrie avant arrière.

En dernier lieu, il est important d'anticiper de possibles crevaisons des ballons lors des essais. Afin d'éviter ce type de problème, les parties saillantes que peut présenter le bâti doivent être protégées avec soin.

Perspectives

Le modèle de Wagner généralisé qui fait l'objet de cette thèse permet de traiter de manière précise l'impact de sections rigides de formes quelconques (symétriques ou non), sur une surface fluide. Il permet en particulier de s'affranchir de l'hypothèse de faible angle mort sur laquelle repose le modèle de Wagner linéarisé. Si l'on souhaite étendre son domaine d'application à des formes tridimensionnelles, la première tâche à entreprendre sera la prise en compte de formes axisymétriques (sphères, ellipsoïdes de révolution...). Dans un tel cas, l'axisymétrie, et donc l'invariance du problème en fonction de l'angle azimutal, permet de simplifier le problème en ne considérant qu'une génératrice définissant la forme du corps.

Le modèle de Wagner généralisé a ensuite été utilisé dans une approche couplée avec un modèle d'élasticité linéaire, pour prendre en compte les déformations de la structure au cours de l'impact. Une approche modale est utilisée pour décrire ces déformations. En pratique, cela signifie que la déflexion en tout point de la structure est décomposée sur une base de modes propres, dépendant de la forme considérée et des conditions aux limites qui lui sont appliquées. Des formes très simples (coins), pourvues de différents types de conditions aux limites, ont été considérées. Dans ce cas, on peut approcher la base des modes de déformation de chaque face du coin par la base des modes de déformation d'une plaque plane. Les déformées modales s'écrivent alors simplement sous forme de fonctions trigonométriques et hyperboliques et permettent un certain nombre de calculs analytiques. Les applications à des formes plus générales restent à effectuer. Le même principe de résolution et le même algorithme peuvent être utilisés. Cependant, si la simulation à l'aide d'un modèle de Wagner généralisé représente un faible coût CPU (de l'ordre de la minute), il en va différemment de la simulation d'un impact hydroélastique (plutôt de l'ordre de l'heure). Cela est lié au fait que la solution du problème n'est pas obtenue directement, mais par un algorithme itératif qui converge vers la solution. L'intégration en temps des équations d'évolution du système requiert en outre l'utilisation d'un petit pas de temps. Pour revenir à des temps de calculs plus faibles, et donc favoriser une utilisation routinière du code, l'algorithme de couplage et les calculs doivent être optimisés voire modifiés.

Enfin, les campagnes expérimentales ont permis d'améliorer nos connaissances pratiques de l'impact hydrodynamique, ainsi que des techniques expérimentales pour les observer. Un certain nombre de recommandations pour la réalisation d'essais futurs sont prodiguées. La première campagne, portant sur l'impact d'un ballon élastique de forme sphérique, a mis en avant un couplage fort lors de l'impact. Elle a également mis en évidence un phénomène d'oscillation intéressant, bien que ne relevant pas à proprement parler de l'impact hydrodynamique. En effet, si les premiers instants de l'impact sont similaires à ce que l'on observe lors d'un impact sur une surface rigide, on a montré que le rebond est précédé d'une phase d'oscillation de la membrane du ballon. Au cours de cette phase d'oscillation, le ballon ne s'enfonce plus, sans pour autant que la phase de remontée ne commence immédiatement.

Les essais réalisés sur un système de flottabilité réel d'hélicoptère ont permis d'obtenir des

ordres de grandeur pour les efforts globaux qui sont encaissés. On a en outre montré que des modèles simples donnent accès à une bonne estimation de ces efforts. En revanche, ces essais n'ont pas réellement permis de quantifier l'importance des déformations des flotteurs. Les caméras sous-marines ne disposaient en effet pas d'une fréquence d'acquisition adapté à la fréquence des oscillations attendues.

Des expériences qui s'attachent davantage à la mesure des déformations et des modifications que celles-ci entraînent sur les efforts locaux serait donc profitables. Elles permettraient d'apporter des arguments tangibles sur la nécessité, ou non, de prendre en compte les déformations des flotteurs dans les calculs réalisés pour dimensionner les systèmes de flottabilité.

Appendices

Annexe A

Schwarz-Christoffel transformation of the step

The relation linking the coordinate in the transformed plane $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$, to the coordinate $z = x + iy$ in the physical plane, is obtained by integrating the Jacobian (3.2) of the transformation as

$$z = i m_e + \sqrt{\tilde{z}^2 - \frac{h^2}{\pi^2} - sg(e_1 - e_2) \frac{h}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{\tilde{z}\pi}{h} \right)}, \quad (\text{A.1})$$

where $m_e = \max(0, e_1 - e_2)$ and $sg(x)$ is equal to 1 if $x > 0$ and equal to -1 if $x < 0$. Solution (A.1) in terms of \tilde{z} is not evident to obtain for a given value of z , because a nonlinear system must be solved. It can be formulated as

$$-x + i(H + \max(e_1, e_2) - f_j(x)) = i m_e + \sqrt{\tilde{z}^2 - \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 - sg(e_1 - e_2) \frac{h}{\pi} \cosh^{-1} \left(\frac{\tilde{z}\pi}{h} \right)}, \quad (\text{A.2})$$

where j denotes either the right side ($j = 1$) or the left side ($j = 2$) of the section. The change of variable $\tilde{z} = \frac{h}{\pi} \cosh t$ with $t = a + ib$ is used. The calculations of (a, b) follows from a Newton's algorithm

$$\begin{pmatrix} a^{(n+1)} \\ b^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{(n)} \\ b^{(n)} \end{pmatrix} - J_F^{-1} \begin{pmatrix} F_R(a^{(n)}, b^{(n)}) \\ F_I(a^{(n)}, b^{(n)}) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

with the right hand sides

$$\begin{cases} F_R = \sinh a \cos b - sg(e_1 - e_2) a + \frac{\pi}{h} x, \\ F_I = \cosh a \sin b - sg(e_1 - e_2) b + \frac{\pi}{h} (y - H - \max(e_1, e_2)) + \pi m_e. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

The Jacobian matrix and its inverse read

$$J_F = \begin{pmatrix} F_{R,a} & F_{R,b} \\ F_{I,a} & F_{I,b} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad J_F^{-1} = \frac{1}{\det J_F} \begin{pmatrix} F_{I,b} & -F_{R,b} \\ -F_{I,a} & F_{R,a} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Computation of the flow

B.0.1 Computation of the velocity potential ϕ on the body surface

Each point (x, y) on the wetted surface has an image on the real axis of the transformed plane $\text{Re}(w) = u$, with $|u| < 1$.

By taking the real part of (3.15), we get

$$\phi(u, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \sqrt{1-u^2} \int_{-1}^1 \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-u)} d\tau. \quad (\text{B.1})$$

According to the definition (3.18) of ψ on the wetted surface, (B.1) reads

$$\phi(u, 0, t) = \frac{V(t)}{\pi} \sqrt{1-u^2} \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) - x_{st}}{\sqrt{1-\tau^2}(\tau-u)} d\tau. \quad (\text{B.2})$$

By using the change of variable $\tau = \cos \alpha$ and by noting $u = \cos \theta$, (B.2) becomes

$$\phi(u, 0, t) = \frac{V(t)}{\pi} \sin \theta \int_0^\pi \frac{x(\alpha) - x_{st}}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha. \quad (\text{B.3})$$

The contribution of x_{st} in the integral (B.3) reduces to a Glauert integral of order 0, that is identically zero. By using the decomposition (3.10) of x , we have

$$\phi(u, 0, t) = \frac{V(t)}{\pi} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \int_0^\pi \frac{\cos n\alpha}{\cos \alpha - \cos \theta} d\alpha, \quad (\text{B.4})$$

that involves typical Glauert integral

$$\phi(u, 0, t) = V(t) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin n\theta. \quad (\text{B.5})$$

B.0.2 Computation of the stream function ψ on the free surface

The image of the free surface in the complex plane is defined by the real axis with $|u| \geq 1$. By taking imaginary part of (3.15), the following solution is extracted

$$\psi(u, 0, t) = sg(u) \frac{V(t)}{\pi} \sqrt{u^2 - 1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \int_0^\pi \frac{\cos n\alpha}{\cos \alpha - u} d\alpha. \quad (\text{B.6})$$

The integral in (B.6) is noted I_n .

$$I_0(u) = \frac{-2\pi \operatorname{sg}(u)}{\sqrt{u^2 - 1}} \quad \text{and} \quad I_1(u) = \pi + u I_0. \quad (\text{B.7})$$

By noting that

$$\cos n\alpha = 2 \cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha, \quad (\text{B.8})$$

a recursion formula for I_n is found as

$$I_n(u) = 2u I_{n-1}(u) - I_{n-2}(u). \quad (\text{B.9})$$

B.0.3 Computation of vertical velocity $\phi_{,y}$ on the free surface

The vertical velocity on the free surface is calculated from the derivative

$$\phi_{,y} = -\mathbb{I}m \left\{ \frac{dF}{dZ} \right\} = -\mathbb{I}m \left\{ \frac{1}{J(w)} \frac{dF}{dw} \right\}. \quad (\text{B.10})$$

$J(w)$ is the Jacobian of the conformal mapping. As it is real on the axis ($\mathbb{I}m \{w\} = 0$, $|u| > 1$), we have

$$\phi_{,y}(u, 0, t) = -\frac{1}{J(u)} \frac{d\psi}{du}. \quad (\text{B.11})$$

By derivating (B.6), we obtain

$$\psi_{,u}(u, 0, t) = \operatorname{sg}(u) \frac{V(t)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L_n(u), \quad (\text{B.12})$$

with

$$L_n(u) = \frac{d}{du} \left\{ \sqrt{u^2 - 1} I_n(u) \right\} = \frac{u}{\sqrt{u^2 - 1}} I_n(u) + \sqrt{u^2 - 1} K_n(u), \quad (\text{B.13})$$

where

$$K_n(u) = \int_0^\pi \frac{\cos n\alpha}{(\cos \alpha - u)^2} d\alpha, \quad |u| > 1. \quad (\text{B.14})$$

The functions $K_n(u)$ verify the relation

$$K_n(u) = u K_{n-1}(u) + n I_{n-1}(u), \quad \text{with} \quad K_0(u) = \frac{u I_0(u)}{1 - u^2}. \quad (\text{B.15})$$

The vertical velocity is then given by

$$\phi_{,y}(u, 0, t) = \operatorname{sg}(u) \frac{V(t)}{J(u) \pi} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L_n(u). \quad (\text{B.16})$$

B.0.4 Representation of I_n and L_n

The first five functions I_n and L_n are represented in figure B.1.

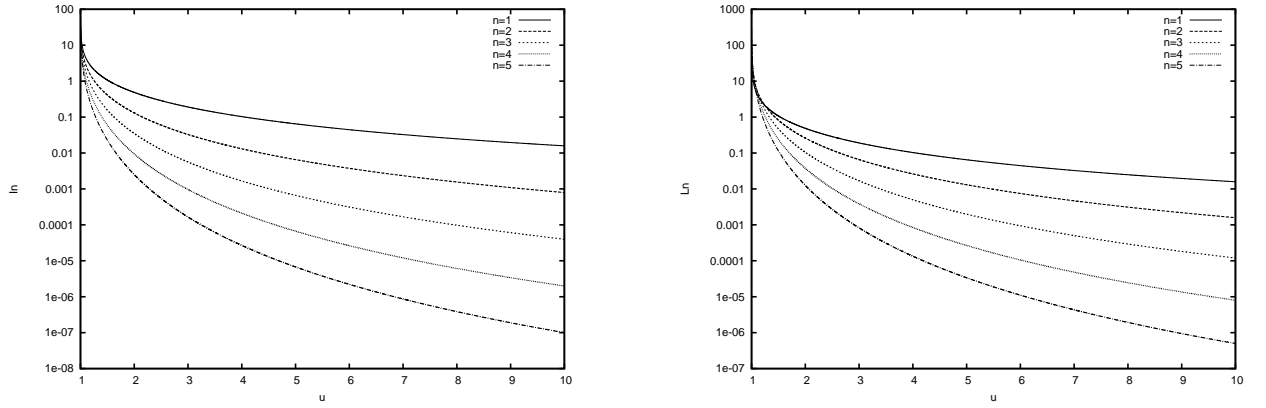


FIG. B.1 – Representation of the first five functions $I_n(u)$ (left) and $L_n(u)$ (right)

It can be shown that

$$\lim_{u \rightarrow \pm 1} \sqrt{u^2 - 1} L_n(u) = sg(u)^n n\pi. \quad (\text{B.17})$$

Asymptotically, it can be also shown that

$$L_n(u) = O(u^{n+1}) \quad \text{as } |u| \rightarrow \infty. \quad (\text{B.18})$$

An interesting property¹ of the functions $L_n(u)$ is that

$$\int_1^\infty L_n(u) du = \left[\sqrt{u^2 - 1} I_n(u) \right]_1^\infty = \pi, \quad (\text{B.19})$$

and

$$\int_{-\infty}^{-1} L_n(u) du = (-1)^n \pi. \quad (\text{B.20})$$

¹In particular to prove mass conservation law (see 4.2)

Annexe C

Glauert's integral

In numerous problem of aerodynamics and hydrodynamics, one have to solve

$$\frac{u}{V} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T'(x)}{x - \xi} dx. \quad (C.1)$$

It is convenient to use the following change of variable :

$$x = \cos \theta \quad \xi = \cos \alpha, \quad (C.2)$$

so that (C.1) becomes :

$$\frac{u}{V} = \frac{-1}{\pi} \int_0^\pi \frac{T'(\theta)}{\cos \theta - \cos \alpha} d\theta. \quad (C.3)$$

Then, (C.3) may be easily solved if $T(\theta)$ is known under a trigonometric series form :

$$T(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos k\theta. \quad (C.4)$$

sin term in (C.4) give rise to the famous Glauert integral :

$$PV \left\{ \int_0^\pi \frac{\cos k\theta}{\cos \theta - \cos \alpha} d\theta \right\} = \pi \frac{\sin |k|\alpha}{\sin \alpha}, \quad (C.5)$$

which is usefull in the present study, to compute the velocity potential on the wetted surface.

The solution for the cos contribution in (C.4) has been explicited in [Bera, 1977b], [Bera, 1977a] and [Bera, 1978] as :

$$PV \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin k\theta}{\cos \theta - \cos \alpha} d\theta \right\} = J_k, \quad (C.6)$$

where J_k verify the recurrence relation :

$$J_{k+1} + J_{k-1} = 2 J_k \cos \alpha + \frac{2}{k} (1 - (-1)^k). \quad (C.7)$$

This relation is initialized with :

$$J_0 = 0 \quad \text{and} \quad J_1 = 2 \log \tan \alpha / 2 \quad (C.8)$$

$$J_k = 2 \log \tan \frac{\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha} + \frac{2}{\sin \alpha} \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(1 - (-1)^i)}{i} \sin(k-i)\alpha. \quad (C.9)$$

Annexe D

From Chebyshev series to monomial series

Let us consider the following decompositions

$$\sum_{j=0}^N a_j T_j(\ell^*) = \sum_{j=0}^N a_j^* \ell^{*j} = \sum_{j=0}^N b_j \ell^j, \quad \ell \in [0, \ell_{max}], \quad (D.1)$$

where $T_j(\ell^*)$ is the j^{th} Chebyshev polynomials of the first kind with a proper scaling. This scaling is defined so that for $\ell \in [0, \ell_{max}]$, $\ell^* \in [-1; 1]$. Hence $\ell^* = \frac{2\ell}{\ell_{max}} - 1$. The b_j coefficients are deduced from the a_j^* by :

$$b_j = \sum_{k=j}^N a_k^* C_k^j (-1)^{k-j} \left(\frac{2}{\ell_{max}} \right)^j, \quad (D.2)$$

where C_k^j are the binomial coefficients. The coefficients a_j^* are calculated from the a_j :

$$a_j^* = \sum_{k=0}^j a_k m_{kj}, \quad (D.3)$$

where the m_{kj} are obtained thanks to Chebyshev's polynomial definition :

$$\begin{cases} m_{kj} = 0 & \text{if } k < j \text{ or } k + j \text{ odd,} \\ m_{kj} = (-1)^{k/2} & \text{if } j = 0, \\ m_{kj} = (-1)^{\frac{k+j}{2}+j} 2^{j-1} C_{\frac{k+j}{2}-1}^{j-1} \frac{k}{j} & \text{else.} \end{cases} \quad (D.4)$$

Unfortunately, there is no hope to properly transform a Chebyshev series into a monomial series for a large number of terms. In fact, for $N > 10$, this procedure is not stable anylonger. This problem is illustrated in figure D.1. In that case, $N = 28$ and the interpolated function is a logarithmic.

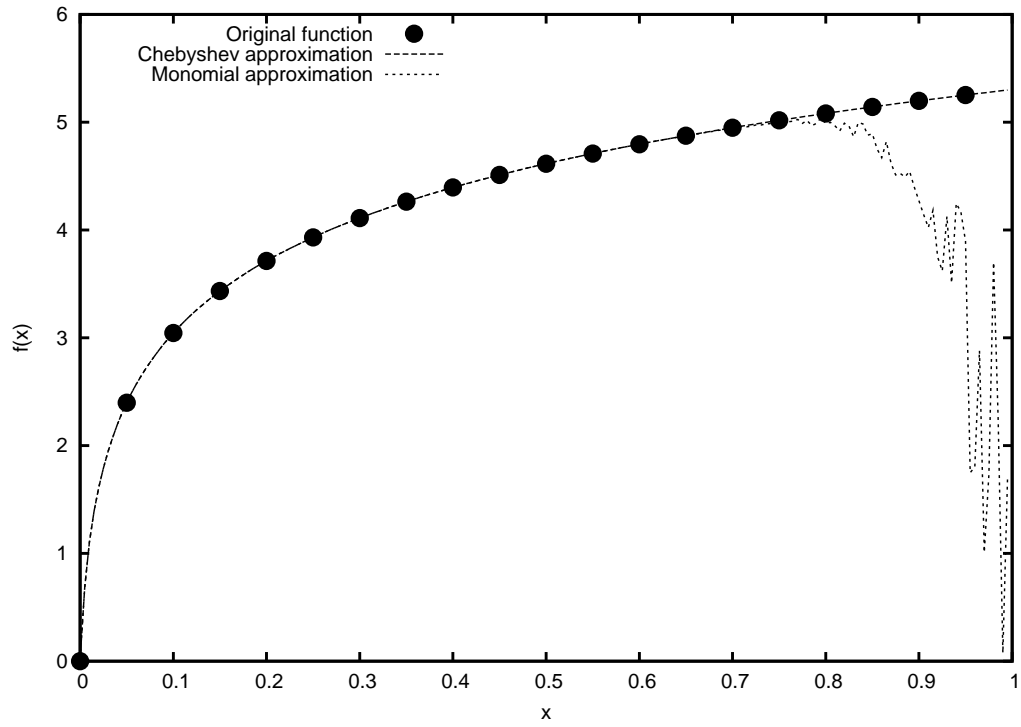


FIG. D.1 – Illustration of the instability of the conversion : the same analytical function (dots) is approximated by a Chebyshev series (solid lines) and a monomial series (dashed lines), obtained via the present conversion process

Annexe E

Wetting correction in a linearized Wagner model for asymmetric sections

Given the two integrals

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{c_2}^{c_1} f(x) \sqrt{\frac{c_1 - x}{x - c_2}} dx, \\ I_2 &= \int_{c_2}^{c_1} f(x) \sqrt{\frac{x - c_2}{c_1 - x}} dx. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

The linearized Wagner theory prescribed

$$I_1 = I_2. \quad (\text{E.2})$$

In order to obtain c_1 in function of c_2 or the contrary, the following algorithm is used : By using the change of variable :

$$x = Au + B, \quad \text{with} \quad A = 1/2(x_1 - x_2) \quad \text{and} \quad B = 1/2(x_1 + x_2), \quad (\text{E.3})$$

the two integrals become

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 A \frac{f(Au + B) (1 - u)}{\sqrt{1 - u^2}} du, \\ I_2 &= \int_{-1}^1 A \frac{f(Au + B) (1 + u)}{\sqrt{1 - u^2}} du. \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Since the considered shapes are smooth enough, it is generally possible to express f under the form

$$f(Au + b) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(u). \quad (\text{E.5})$$

Integrals I_1 and I_2 then reduce to

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n A \left(\pi \delta_{n0} - \frac{\pi}{2} \delta_{n1} \right) = A\pi \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right), \\ I_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n A \left(\pi \delta_{n0} + \frac{\pi}{2} \delta_{n1} \right) = A\pi \left(a_0 + \frac{a_1}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

where the coefficients a_n are functions of c_1 and c_2 . Hence, equality (E.2) reduces to $a_1(c_1, c_2) = 0$ *i.e.* to a minimization problem.

Table des figures

1.1	Illustration du phénomène de tossage (http://www.hydrolance.net)	1
1.2	Rupture de la structure du pétrolier “Prestige” consécutivement à une tempête en novembre 2002 (http://www.hydrolance.net)	2
1.3	Plate-forme d’exploitation pétrolière et FPSO (http://www.atlantia.com) . .	2
1.4	Navires destinés au transport du Gaz Naturel Liquéfié. Images téléchargées depuis les sites http://www.bp.com et http://www.memagazine.org	3
1.5	Test de l’impact sur l’eau de la capsule Gemini (http://history.nasa.gov) . .	3
1.6	Système de flottabilité de l’hélicoptère militaire NH90 (photos Eurocopter) . . .	4
1.7	A gauche : Formation des personnels navigants à l’amerrissage d’urgence (http://www.safetycenter.navy.mil). A droite : Hélicoptère non équipé de système de flottabilité (http://www.mvgazette.com/)	4
2.1	Impact d’une section de cylindre circulaire [Greenhow and Lin, 1983])	9
2.2	Cartes de pression obtenues par une modélisation SPH de l’impact à une vitesse $V = 5m.s^{-1}$ d’un coin d’angle mort 10° à la surface libre d’un fluide (d’après [Deuff, 2007])	11
2.3	Effort (gauche) et distribution de pression (droite) agissant sur un coin d’angle mort 10° (d’après [Deuff, 2007]). Les efforts calculés par SPH sont comparés aux solutions de [Wagner, 1932], [Zhao <i>et al.</i> , 1996] et [Dobrovol’skaya, 1969].	11
2.4	Détails de la zone qui est le siège du décollement lorsque le coin pénètre au delà de sa ligne de côte maximale, à deux instants différents	12
2.5	Simulation de l’impact hydrodynamique d’un coin rigide (gauche) puis déformable (droite) (Aquelet 2004). Illustration de la méthode de capture d’interface VOF.	13
2.6	Illustration de la méthode CIP. Simulation de l’impact hydrodynamique d’un cylindre [Zhu, 2006]. La grandeur représentée est la fonction de densité ϕ_f du fluide. Rouge : $\phi_f = 1$, Bleu : $\phi_f = 0$. Photographies [Greenhow and Lin, 1983]	14
2.7	Simulation de l’impact sur l’eau d’un hélicoptère à l’aide du code RADIOSS (images MECALOG)	15
2.8	Définition des grandeurs géométriques du problème	17
2.9	Représentation synthétique des différentes linéarisations du problème pouvant être adoptées.	19
2.10	Décomposition du problème d’impact en trois problèmes distincts selon que l’on considère la zone externe au jet, la racine du jet ou le jet lui même	20
2.11	Représentation du problème à la racine du jet.	21
2.12	Distribution de pression sur un coin asymétrique. A droite (haut), l’angle mort est égal à 20° , à gauche (bas), l’angle mort vaut 40° . La solution auto-semblable de [Semenov and Iafrati, 2006] (trait plein) est considérée comme une référence. La solution obtenue par MLM (pointillés épais), ainsi que celle obtenue à l’aide d’un modèle de Wagner généralisé (pointillés fins) [Malleron and Scolan, 2007] sont tracées	23

2.13	Histoire de la force hydrodynamique s'appliquant sur un cylindre circulaire de rayon R (d'après [Korobkin, 2004]). Les données expérimentales sont issues des expériences de [Armand and Cointe, 1986]	24
2.14	Ligne de contact entre la surface de la pyramide et la surface libre (d'après [Gazzola, 2007]). La pénétration vaut $H = 0.5$. La courbe pointillée est issue du modèle de Wagner linéarisé de [Korobkin and Scolan, 2006]. Les points et la ligne pleine représentent la solution de [Gazzola, 2007]. La courbe en pointillés et traits alternés représente l'intersection entre la pyramide et la surface libre initiale.	25
2.15	Potentiel des déplacements lors de l'impact sur l'eau d'une pyramide dans le plan de la surface libre initiale pour une valeur de la pénétration $H = 0.5$ (d'après [Gazzola, 2007])	25
2.16	Définition du domaine fluide instantané utilisé dans la formulation BEM.	28
3.1	Configuration of the two-dimensional hydrodynamic impact problem. In the asymmetric case, a stagnation point is observed and does not coincide with the initial contact point	33
3.2	Different linearizations of the impact problem from Karman's approach (a) and linearized Wagner model (b) to GWM (c). Sketch above : actual modelled flow. Sketch below : full or partial linearization of the flow domain. In the first two cases, the wetted surface is projected onto a horizontal plane whereas in the last one, its exact position is taken into account	34
3.3	Asymmetric section impacting liquid. Left : the fluid domain is bounded by the linearized free surface. Right : conformal mappings are used to turn the fluid domain into the lower half plane	35
3.4	Points used to define the Schwarz-Christoffel transformation which removes the step ; modified physical plane z (above) and associated transformed plane \tilde{z} (below)	37
3.5	Asymmetric wedge with interior angle 70 degrees and heel angle 5 degrees (original body) and after removing the step	37
3.6	Sketch of the generalized Wagner problem under two intermediate forms. Left : after removing the step due to the asymmetry. Right : after closing the body contour by continuation in the upper half plane	38
3.7	"Double-body" associated to an asymmetric wedge with interior angle of 70 degrees and heel angle of 5 degrees. The "double-body" is turned into a unit circle. An intermediate step (corners removed) is represented as well	40
3.8	Singularity inverse Jacobian of the total transformation has an order equal to $1 - \beta$	41
3.9	BVP posed in the w -plane where the body contour is a flat plate. n is the normal pointing into the fluid in the physical plane	42
3.10	Computation of the vertical velocity $\phi_{,y}$ at point $c_k(t)$, with $k = 1$ or 2 at a current time of integration τ . At this given time, the shape is defined by $c_1(\tau)$ and $c_2(\tau)$, the wetting correction on the left and right sides respectively	44
3.11	Variation of the coefficient a_0 when the total number N of coefficient increases.	47
3.12	Computation of the pressure distribution acting on a wedge with a deadrise angle equal to 30° . Sum of the linear (dashed lines) and nonlinear (thin dashed lines) contributions (which is represented here in absolute value)	48
3.13	Pressure distribution on both sides of an asymmetric wedge with $\alpha = 30^\circ$, $\delta = 10^\circ$ (top) and $\delta = 20^\circ$ (bottom)	52

3.14	Pressure distribution on both sides of an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$, $\delta = 10^\circ$ (top) and $\delta = 20^\circ$ (bottom)	53
3.15	Sketch of the streamlines of the vortex flow appearing at the apex of an asymmetric wedge during water entry	54
3.16	Relative error $100 \times \left(\frac{c_i - \tilde{c}_i}{c_i} \right)$, $i = 1, 2$ versus heel angle for an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$	55
3.17	Slamming parameter for an asymmetric wedge with $\alpha = 60^\circ$	55
3.18	Pressure distribution acting onto a symmetric wedge during impact at constant velocity for $\beta = 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ$ and 80° (from top to bottom and left to right).	56
3.19	Sections of a circular and non-circular cylinder	57
3.20	Free surface profiles (left) and pressure distribution (right) acting on a circular cylinder section at three different instants of penetration ($Vt/R = 0.01$; $Vt/R = 0.05$; $Vt/R = 0.2$)	58
3.21	History of the hydrodynamic force $C_f = F/(\rho V^2 R)$ acting onto a circular cylinder. Results of the present model (GWM) and added mass approximation are compared to the experimental results (Exp.) by [Campbell and Weynberg, 1980] and BEM.	59
3.22	History of the hydrodynamic force acting on the non circular cylinder. Results by the present model (GW) are compared to the result of Modified Logvinovich Method (MLM)	60
3.23	Geometric representation of the bow section	60
3.24	History of wetting correction predicted by the present model (GW) and by MLM for a bow section	61
3.25	Hydrodynamic force acting on a bow section. The results provided by the present model (GW) are compared to numerical results (NR) as well as MLM results	61
3.26	Geometric representation of the smooth section of a asymmetric paraboloid	62
3.27	Pressure distribution at different instants acting onto the left side (top) and right side (bottom) of the smooth section of a asymmetric paraboloid	63
3.28	Deceleration of a symmetric wedge in free fall with $\beta = 45^\circ$. Parameters of simulation are given in table 3.2 for each cases a,b,c,d	64
3.29	Deceleration of a symmetric wedge in free fall with $\beta = 20^\circ$.	65
3.30	Deceleration (left) and velocity (right) during water entry in free fall of an asymmetric wedge with inner angle equal to 70° and heel angle equal to 5° in the three configurations a, b and c	65
3.31	Evolution in time of the free fall velocity (left) and heel angle δ (right)	66
3.32	Evolution in time of the wetting correction c_1 (left) and c_2 (right) on both sides of the impacting section	67
4.1	Time evolution of both the contact point and the point where the pressure is equal to zero during the circular cylinder impact. The entry velocity is assumed to be constant and it is successively set to 0.75; 1.2; 1.5; 2 and 4 $m.s^{-1}$	70
4.2	Time evolution of the discrepancy between the point where the pressure is equal to zero and the contact point during the circular cylinder impact. The entry velocity is assumed to be constant and it is successively set to 0.75; 1; 1.2; 1.3; 1.5; 2; 3 and 4 $m.s^{-1}$	71
4.3	Shape of a circular cylinder with aspect ratio equal to 0.55; 0.75; 1; 2 and 4	72

4.4	Time evolution of both the contact point and the point where the pressure is equal to zero during the circular cylinder impact. The aspect ratio is successively set to 0.55; 0.75; 1; 2 and 4	72
4.5	Time evolution of the discrepancy between $c(t)$ and $x(p = 0)$. Aspect ratio of the impacting circular cylinder is successively set to 0.55; 0.75; 1; 2 and 4 . . .	73
4.6	Influence of the variable velocity on possible separation $V(t = 0) = 1 \text{ m.s}^{-1}$. . .	73
4.7	Influence of the variable velocity on possible separation. Entry velocity is set to a constant value $V = 4 \text{ m.s}^{-1}$ during whole penetration (solid lines) and to variable values (dashed lines). In the latter case, entry velocity is initially set to 4 m.s^{-1}	74
4.8	Local coordinate system centered onto the separation point	75
4.9	Two possible scenarii concerning the occurrence of the jet. The curvature of the jet depends on the sign of $A_{3/2}$	76
4.10	Identified coefficients A_0 , U_s , $A_{3/2}$ (from left to right and top to bottom) and curvature of the free surface at the jet root during circular cylinder water impact	76
4.11	Matching between the local solution in the jet area and the exterior solution. Solution in terms of velocity potential in the jet is represented by a line. The values in the exterior domain of the jet root, provided by the generalized Wagner model and used to perform the identification, are represented by crosses	77
4.12	Definition of instantaneous mass of fluid displaced during the penetration	77
4.13	Computed free surface elevation (left) at 9 instants of the impact. This elevation is used to check mass conservation (right) for a wedge (top) and for a circular cylinder (bottom)	79
4.14	Error on the maximum of pressure versus deadrise angle in different models. . .	80
4.15	Slamming parameter versus deadrise angle for symmetric wedge impact	81
4.16	Power in the jet versus deadrise angle during symmetric wedge impact	81
4.17	Evolution of the expansion velocity of the wetted surface during the water entry of a wedge. The angle of this wedge is varying in the range $[5^\circ; 90^\circ]$	82
4.18	Geometric definition of the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5; 2; 10 and 50	84
4.19	History of the contact point for the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5; 2; 10 and 50	85
4.20	History of the expansion velocity of the wetted surface for the tulip shape. The parameter a is successively set to 0.5; 2; 10 and 50	85
4.21	Pressure distribution at various instants for 4 values of a , maximum of pressure history (dashed lines) and its approximation $(dc/dt)^2$ (dotted lines)	86
4.22	Impact of the wedge half-section along a vertical wall and equivalent symmetric problem	87
4.23	Force in the horizontal and vertical direction acting onto an impacting section. The shape of this section is sinusoidal (top) or circular (bottom)	88
4.24	Geometry (top) and local deadrise angle (bottom) of the sinusoidal shape for aspect ratio varying from 0.5 to 8	89
4.25	Time history of the contact point position for the sinusoidal shape with various aspect ratio. The arrow shows the increasing direction of the aspect ratio	90
4.26	Time history of dc/dt for the sinusoidal shape with various aspect ratio. The arrow shows the increasing direction of the aspect ratio	91
4.27	Prediction of the maximum of pressure by the present model (gwm) and by the modified Logvinovich method (mlm).	91

4.28	Pressure distribution for a sinusoidal shape with various aspect ratio. From left to right and top to bottom it is successively set to 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; and 8. The value of the maximum of pressure is plotted (dashed lines) as well as the square of the expansion velocity of the wetted surface (dotted lines)	92
4.29	Modification of the sinus-like shape, relying on an angle of aperture γ , in order to reduce the angle at the apex	93
4.30	Time history of the contact point position for the sinusoidal shape with various value of the aperture. The arrow shows the increasing direction of this aperture .	94
4.31	Time history of the expansion velocity of the wetted surface for the sinusoidal shape with various value of the aperture. The arrow shows the increasing direction of this aperture	94
4.32	Pressure distribution for a sinusoidal shape with various value of the aperture. From left to right and top to bottom it is succesively set to 1° , 2° , 4° , 8° , 12° , $12,762^\circ$. The value of the maximum of pressure is plotted (dashed lines) as well as the square of the expansion velocity of the wetted surface (dotted lines) . . .	95
5.1	Sketch of the hydrodynamic problem of a deformable section hitting a free surface. Dashed lines represent the undeformed shape of the section	98
5.2	Algorithm used to obtain the solution of the fully coupled problem.	99
5.3	Transformation linking a point of azimuthal coordinate θ in the physical plane to a point parametrized by α in the transformed plane where the body is a circle.	100
5.4	Sketch of the three type of boundary condition applied on the elastic wedge . . .	104
5.5	Successive predictions of first mode weight (top) and wetting correction (bottom) histories during the iterative process ($e=4$ mm, $V=4$ m.s $^{-1}$, $\alpha = 10^\circ$)	107
5.6	Relative variations of the first five modes, compared to the first one, when $e = 1$ mm (top) and $e = 4$ mm (bottom)	108
5.7	Illustration of one limitation of the hydroelastic model : When $dc/dt < 0$, the associated double-body is not simply connected anymore	109
5.8	Position of the contact point during the hydroelastic impact predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner (LWM) model for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4$ m.s $^{-1}$	110
5.9	History of the first mode of deformation predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner model (LWM) for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4$ m.s $^{-1}$	112
5.10	History of the second mode of deformation predicted by the generalized Wagner model (GWM) and by the coupled linearized Wagner model (LWM) for various values of the thickness, $\alpha = 10^\circ$ and $V = 4$ m.s $^{-1}$	113
5.11	Evolution of expansion velocity $\frac{dc}{dt}$ of the wetted surface with the thickness of the section. Two different behaviours are observed, depending if the thickness e is smaller than 2 mm (left) or larger (right). Arrow shows the increasing direction of the thickness	114
5.12	Evolution of the contact point $c(t)$ with the thickness of the section ($\alpha = 10^\circ$). Arrow shows the increasing direction of the thickness.	114
5.13	Evolution of the first mode weight $q_1(t)$, with the thickness of the section. Arrow shows the increasing direction of the thickness	115
5.14	Instantaneous position of the contact point $c(t)$ (top) and expansion velocity of the wetted surface dc/dt (bottom) for a deadrise angle varying between 5° and 40° . Arrow shows the direction in which α increases	116

5.15	History of the deflection at two points located at $x = R/3$ and $x = 2R/3$ predicted by the present model and the linearized Wagner model	117
5.16	History of the contact point position $c(t)$ (top) as well as expansion velocity of the wetted surface (bottom), in function of the entry velocity. Arrow shows the increasing direction of the velocity	118
5.17	Time history of deflection at points $x = R/3$ (left) and $x = 2R/3$ (right), as a function of the entry velocity. Arrow shows the increasing direction of the velocity. Deadrise angle is set to 10 degrees and the thickness is set to 4 mm . .	119
5.18	Maximum of pressure acting on the section and its approximation $(dc/dt)^2$. Important discrepancies compared to the rigid case are highlighted	120
5.19	Instantaneous pressure distribution at two instants of the impact in the deformable case compared to the rigid solution, for a thickness equal to 4 mm (top) and 10 mm (bottom)	121
5.20	Maximum of the stress versus thickness. Results for the fully coupled linearized Wagner model (F) and for the simplified linearized Wagner model (A1) are compared to the generalized Wagner model (GWM).	122
5.21	Histories of the wetting correction (top) and of the expansion velocity of the wetting surface (bottom) for a wedge with $e = 10$ mm and for the three different boundary conditions presented in table 5.1.	123
5.22	Pressure distribution at three instants of penetration (left). Corresponding instantaneous shapes of the impacting body are represented (right). From top to bottom : BC1, BC2, BC3.	124
6.1	Principle of the experimental setup (center). Pressure measurement system (left), inflated ball (top, right), fast camera (center, right) and hydrodynamic flume (bottom right)	128
6.2	Position on the ball of the test pieces T,B,C and Ct (left) and their geometric definition in terms of length L , width l and thickness e (right)	129
6.3	Tension force (N) in function of the imposed longitudinal displacement (mm) for test pieces coming from various area of the ball (left) and for pieces cut in two orthogonal directions (right)	129
6.4	Tension force (N) in function of the imposed displacement (mm) in the longitudinal direction (left) and displacement in the transient direction versus displacement in the longitudinal direction (right)	130
6.5	Radius of the sphere at rest, varying with the inner pressure. Points represent data measured experimentally. A linear regression is performed using these points (dashed lines). The theoretical radius, given by the elastic theory, is represented by thin dashed lines	131
6.6	Position of the apex into an absolute system of coordinates	133
6.7	Impact and rebound of the inflated ball on a rigid surface. Parameters are $p = 20$ mbar and $h = 1.80$ m	134
6.8	Measure of the deflection	136
6.9	Repeatability of the measure of the deflection at the apex. Three drop tests are performed successively	137
6.10	Relative error versus time between the three measures of the deflection at the apex	137
6.11	Representation of the deflection at the apex for 7 values of the inner pressure. First instants are considered and attention is focused on the first peak. The arrow is oriented from the lowest inner pressure to the highest	138

6.12	Sketch of the ball in one of its vertical equatorial plane. For low inner pressure, the deflection at the apex can be important. As a consequence, a large part of the wetted surface can be hidden to the camera	139
6.13	One of the effects of low inner pressure : the occurrence of azimuthal modes in the deformation of the body	139
6.14	Influence of the height of the free fall on the behaviour of the ball. The arrow shows the direction in which h increases	141
6.15	Representation of the coupled linearized Wagner problem, formulated in terms of displacement potential. The structural problem (left) is decomposed on the deformation modes of a flat disc of radius R . The hydrodynamic problem (right) is linearized by representing the wetted surface as a flat disc of radius $a(t)$, in expansion into the fluid	142
6.16	Penetration (left) and entry velocity (right) during early stage of the impact. Solid lines shows the kinematics obtained by numerical simulation. Datas represented by points are issued from the experiments	143
6.17	Acceleration during early stage of the impact. Solid lines shows the kinematics obtained by numerical simulation. Datas represented by points are issued from the experiments	143
6.18	Successive deformed shapes (steps 1 to 4) of the ball during the early impact. Solid lines are obtained by numerical simulation and deformation represented by lines and points are measured during the experiments	144
6.19	Successive deformed shapes (steps 5 to 10) of the ball during the early impact. Solid lines are obtained by numerical simulation and deformation represented by lines and points are measured during the experiments	145
7.1	Système de flottabilité d'un hélicoptère NH90 en cours de gonflage (haut) et complètement gonflé (bas)	147
7.2	Vue d'ensemble de la maquette hors d'eau, réalisée pour l'étude de l'impact d'un système de flottabilité d'hélicoptère	148
7.3	Largueur de spi utilisé pour le lâcher de la maquette	149
7.4	Modifications apportées par rapport à la configuration réelle : flotteur maintenu par des sangles (gauche) et prolongement du carénage (droite)	150
7.5	Schéma de principe du montage	150
7.6	Maquette suspendue au dessus du bassin. Les cibles nécessaires à la mesure des mouvements par le système KRYPTON sont positionnées à l'avant et surélevées pour éviter les éclaboussures	151
7.7	Accéléromètre central, placé sur le mât par lequel la maquette est suspendue	151
7.8	Comparaison du signal temporel issu des accéléromètres (central : bleu foncé; tribord : bleu clair) à la dérivée seconde du signal KRYPTON correspondant (vert)	152
7.9	Capteur de pression utilisé pour mesurer à la fois la pression de gonflage et les variations de pression interne lors de l'impact	152
7.10	Capteur de force permettant la mesure des efforts de liaison flotteur-bâti	153
7.11	Visualisation d'un essai à l'aide du dispositif vidéo mis en place.	153
7.12	Répétitivité sur les voies 1 à 4 du même essai réalisé trois fois	156
7.13	Angle de gîte au cours de trois essais successifs (voie K4)	157
7.14	Répétitivité des essais d'un jour sur l'autre avec des conditions climatiques différentes (sec jour 1, humide jour 2)	158
7.15	Décomposition de la pénétration dans l'eau de la maquette	159

7.16	Cinématique et histoire de la pression interne et des efforts de liaisons au cours du temps et mise en évidence des différentes étapes du phénomène	160
7.17	Corrélation entre la pression interne dans le ballon tribord et l'effort de liaison .	161
7.18	Phénomène lors de la phase post-impact. Le bâti oscille dans le fluide avec un mouvement de pilonnement (enveloppe) tandis que les flotteurs oscillent dans un mouvement de rotation (porteuse)	162
7.19	Corrélation entre l'accélération verticale et les efforts de liaison	163
7.20	Influence de la pression interne sur les efforts de liaison aux premiers instants de la pénétration	164
7.21	Influence de la hauteur de chute sur le maximum des efforts de liaison	165
7.22	Effets de la dissymétrie avant arrière	166
7.23	Influence de l'assiette sur les efforts de liaison	166
7.24	Coefficient de masse ajoutée C_a (gauche) et masse ajoutée M_a (droite) en fonction de la correction mouillée $a(t)$. Les définitions 7.5 (Wagner) et 7.12 (Taylor) sont utilisées	168
7.25	Vitesse de pénétration du système aux premiers instants. La ligne verticale repère l'instant du contact initial. 'SA' : Solution analytique du modèle linéarisé, 'SN' : Solution numérique du modèle linéarisé, 'GWM' : modèle de Wagner généralisé, 'Exp.' : Résultats expérimentaux	170
7.26	Histoire de la pénétration aux premiers instants. La ligne verticale repère l'instant du contact initial	170
7.27	Comparaison des efforts hydrodynamiques calculés aux efforts mesurés dans les liaisons	171
7.28	Comparaison du maximum des efforts calculés par des modèles de Wagner à ceux mesurés dans les liaisons pour différentes valeurs de la hauteur de chute .	172
B.1	Representation of the first five functions $I_n(u)$ (left) and $L_n(u)$ (right)	183
D.1	Illustration of the instability of the conversion : the same analytical function (dots) is approximated by a Chebyshev series (solid lines) and a monomial series (dashed lines), obtained via the present conversion process	188

Liste des tableaux

2.1	Impact d'un coin rigide - temps CPU pour différentes méthodes de résolution . .	31
2.2	Impact d'un coin élastique - temps CPU pour différentes méthodes de résolution	31
3.1	Coordinate of the stagnation point (x_{st}) and maximum of the pressure distribution on the left (p_{max}^L) and the right (p_{max}^R) side of an asymmetric wedge for $\alpha = 60^\circ$ and various values of δ	53
3.2	Symmetric wedge in free fall : parameters of the simulations	64
3.3	Asymmetric wedge in free fall : maximal deceleration for three configurations denoted a,b,c listed in table 3.2	66
5.1	Definition of the normal modes corresponding to the three boudary conditions sketched in figure 5.4	105
5.2	Evolution of the 5 coefficients of $\frac{d\tau}{dt}$ during the 10 steps of the iterative process (e=4mm).	106
5.3	Evolution of the 5 coefficients of $\frac{d\tau}{dt}$ during the 6 steps of the iterative process (e=10mm).	106
6.1	Mechanical characteristics of the ball, obtained experimentally	130
6.2	Ball at rest in the air : radius in function of the inner pressure	131
6.3	Decomposition of the water entry of the ball in 12 important steps	132
6.4	Description of each 12 steps of the impact represented in table 6.3, from the beginning of the free fall to the water exit	133
6.5	Order of magnitude of the three characteristic numbers highlighted by the dimensional analysis	135
6.6	Value of the first frequency for different values of inner pressure.	140
6.7	Theoritical and practical velocity at the first instant of contact	140
7.1	Tableau récapitulatif des essais réalisés et validés. Caractéristiques en terme de pression interne (p), hauteur de chute (h), assiette (α) et angle de gîte (δ) . . .	155
7.2	Valeurs du maximum des efforts au cours de l'entrée dans l'eau du dispositif expérimental	172

Bibliographie

- [CAS, 2003] Crashworthiness of helicopter on water : design of structure using advanced simulation tools. *G4RD-CT-2000-000178*, 2000-2003.
- [CRA, 2004] Crashworthiness of aircraft for high velocity impact. *G4RD-CT-2000-00395*, 2000-2004.
- [Aquelet, 2004] N. AQUELET. *Modélisation de l'impact hydrodynamique par un couplage fluide structure*. PhD thesis, Université de Lille (France), 2004.
- [Arai *et al.*, 1994] M. ARAI, L.Y. CHENG, and Y. INOUE. A computing method for the analysis of water impact of arbitrary shaped bodies. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 176, 1994.
- [Arai *et al.*, 1995] M. ARAI, L.Y. CHENG, and Y. INOUE. A computing method for the analysis of water impact of arbitrary shaped bodies (2nd report). *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 177, 1995.
- [Armand and Cointe, 1986] J.L. ARMAND and R. COINTE. Hydrodynamic impact analysis of a cylinder. In *5th Int. OMAE Symposium, Tokyo, Japan*, 1986.
- [Ashby *et al.*,] M. ASHBY, H. SHERCLIFF, and D. CEBON. *Materials. Engineering, Science, Processing and Design*. Butterworth-Heinemann Editors.
- [Battistin and Iafrati, 2001] D. BATTISTIN and A. IAFRATI. Impact of 2D and axisymmetric bodies with arbitrary section on the water surface. In *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*,, 2001.
- [Battistin and Iafrati, 2003] D. BATTISTIN and A. IAFRATI. Hydrodynamic loads during water entry of two-dimensional and axisymmetric bodies. *Journal of Fluid and Structures*, pages 643–664, 2003.
- [Battistin and Iafrati, 2004] D. BATTISTIN and A. IAFRATI. A numerical model for the jet generation by water impact. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :353–374, 2004.
- [Benz, 1989] W. BENZ. Smooth Particle Hydrodynamics : a review. *Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics preprint*, 2884, 1989.
- [Bera, 1977a] R. K. BERA. Errata - remarks on thin airfoil theory. *Journal of Aircraft*, page 1248, 1977.
- [Bera, 1977b] R. K. BERA. Remarks on thin airfoil theory. *Journal of Aircraft*, pages 508–509, 1977.
- [Bera, 1978] R. K. BERA. Errata - remarks on thin airfoil theory. *Journal of Aircraft*, page 320, 1978.
- [Borg, 1957] S. BORG. Some contribution to the wedge-water entry problem. *American Society of Civil Engineering Mechanics Division*, 83 :1–28, 1957.
- [Campbell and Weynberg, 1980] I.M.C. CAMPBELL and P.A. WEYNBERG. Measurement of parameter affecting slamming. *Technology reports center*, OT-R-8042 :318–334, 1980.

- [Chekin, 2004] B.S. CHEKIN. The entry of a wedge into an incompressible fluid. *Journal of Applied Mathematics Mechanics*, 53 :300–307, 2004.
- [Cointe, 1991] R. COINTE. Free surface flows close to a surface piercing body. *Mathematical approach in Hydrodynamics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia*, pages 319–334, 1991.
- [Cointe *et al.*, 2004] R. COINTE, E. FONTAINE, B. MOLIN, and Y.-M. SCOLAN. On energy arguments applied to the hydrodynamic impact force. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :305–319, 2004.
- [Cumberbatch, 1960] E. CUMBERBATCH. The impact of a water wedge on a wall. *Journal of Fluid Mechanics*, 7 :353–374, 1960.
- [Deuff, 2007] J.-B. DEUFF. *Extrapolation au réel des mesures de pressions obtenues sur des cuves modèles réduits*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (France), 2007.
- [Dobrovol’skaya, 1969] Z.N. DOBROVOL’SKAYA. On some problems of similarity flow of fluid with free surface. *Journal of Fluid Mechanics*, 36 :805–829, 1969.
- [Donguy, 2002] B. DONGUY. *Etude de l’interaction fluide structure lors de l’impact hydrodynamique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, 2002.
- [Donguy *et al.*, 2001] B. DONGUY, B. PESEUX, L. GORNET, and E. FONTAINE. Three-dimensional hydroelastic water entry : preliminary results. In *11th Int. Offshore and Polar Engineering Conference*, 2001.
- [Faltinsen, 1997] O.M. FALTINSEN. The effect of hydroelasticity on ship slamming. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, A355 :575–591, 1997.
- [Faltinsen, 2002] O.M. FALTINSEN. Water entry of a wedge with finite deadrise angle. *Journal of Ship Research*, 46 :39–51, 2002.
- [Faltinsen and Chezhian, 2005] O.M. FALTINSEN and M. CHEZHIAN. A generalized Wagner method for three-dimensional slamming. *Journal of ship research*, 49 :279–287, 2005.
- [Faltinsen *et al.*, 2004] O.M. FALTINSEN, M. LANDRINI, and M. GRECO. Slamming in marine applications. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :187–217, 2004.
- [FIRST, 2008] BGO FIRST. Rapport d’essais C.07.2.032bis. 2008.
- [Fontaine, 2000] E. FONTAINE. On the smoothed particle hydrodynamics to model extreme waves and their interaction with a structure. In *Rogue wave*, 2000.
- [Fontaine and Cointe, 1992] E. FONTAINE and R. COINTE. A second order solution for the wedge entry with small deadrise angle. In *Proceedings of the 7th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Val de Rueil, France*, pages 105–108, 1992.
- [Fraenkel and Keady, 2004] L.E. FRAENKEL and G. KEADY. On the entry of a wedge into water : the thin wedge and an all purpose boundary layer equation. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :219–252, 2004.
- [Gakhov, 1966] F.D. GAKHOV. *Boundary value problem*. Pergamon, Oxford, 1966.
- [Gallet, 2001] C. GALLET. Validation de la méthode SPH au sein du logiciel LS-Dyna. *Technical report, Dynalis, Toulouse*, 2001.
- [Garabedian, 1953] P. GARABEDIAN. Oblique water entry of a wedge. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 6 :157–165, 1953.
- [Gazzola, 2007] T. GAZZOLA. *Contributions aux problèmes d’impact non-linéaires : le problème de Wagner couplé*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2007.

- [Gazzola *et al.*, 2007] T. GAZZOLA, A. KOROBKIN, and Š. MALENICA. Hydro-elastic Wagner impact using variational inequalities. In *22th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Plitvice, Croatia*, 2007.
- [Gazzola *et al.*, 2005] T. GAZZOLA, A. KOROBKIN, Š. MALENICA, and Y.-M. SCOLAN. Three-dimensional wagner problem using variational inequalities. In *20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Spitzbergen, Norway*, 2005.
- [Gillow, 1998] K.A. GILLOW. *Codimension-two free boundary problem*. PhD thesis, University of Oxford (UK), 1998.
- [Greenhow, 1987] M. GREENHOW. Wedge entry into initially calm water. *Applied Ocean Research*, 9 :214–223, 1987.
- [Greenhow, 1988] M. GREENHOW. Water-entry and -exit of a horizontal circular cylinder. *Applied Ocean Research*, 10 :191–198, 1988.
- [Greenhow and Lin, 1983] M. GREENHOW and W.M. LIN. Non-linear free surface effects : experiments and theory. *MIT Report*, pages 83–119, 1983.
- [Halsey, 1979] N.D. HALSEY. Potential flow analysis of multielement airfoils using conformal mapping. *AIAA Journal*, 17 :1281–1289, 1979.
- [Hirt and Nichols, 1981] C.W. HIRT and B.D. NICHOLS. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamic of free boundaries. *Journal of Computational Physic*, 1 :201–225, 1981.
- [Howison *et al.*, 2004] S.D. HOWISON, J.R. OCKENDON, and J.M. OLIVER. Oblique slamming, planing and skimming. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :321–337, 2004.
- [Howison *et al.*, 1991] S.D. HOWISON, J.R. OCKENDON, and S.K. WILSON. Incompressible water entry problems at small deadrise angle. *Journal of Fluid Mechanics*, 222 :215–230, 1991.
- [Iafrati, 2000] A. IAFRATI. Hydrodynamics of asymmetric wedges impacting the free surface. In *ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, 2000.
- [Ionina and Korobkin, 1999] M.F. IONINA and A.A. KOROBKIN. Water impact on cylindrical shells. In *4th Int. Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Port Huron, MI, USA*, 1999.
- [Judge *et al.*, 2004] C. JUDGE, A. TROESCH, and M. PERLIN. Initial water impact of a wedge at vertical and oblique angles. *Journal of Engineering Mathematics*, 48 :279–303, 2004.
- [Khabakhpasheva, 2007] T.I. KHABAKHPASHEVA. Effects of thickness of water layer on impact of elastic cylindrical shell. In *International Conference on Violent Flows, Fukuoka, Japan*, 2007.
- [Khabakhpasheva and Korobkin, 2003] T.I. KHABAKHPASHEVA and A.A. KOROBKIN. Approximate models of elastic wedge impact. In *18th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Le Croisic, France*, 2003.
- [Kihara, 2004] H. KIHARA. Numerical modeling of flow in water entry of a wedge. In *19th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Cortona, Italy*, 2004.
- [Kim *et al.*, 2007] Y.W. KIM, Y. Kim Y.M. LIU, and D. YUE. On the water-entry impact problem of asymmetric bodies. In *9th International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, Ann Harbor, MI, USA*, 2007.
- [Korobkin, 2004] A. KOROBKIN. Analytical models of water impact. *European Journal of Applied Mathematics*, 15 :821–838, 2004.
- [Korobkin, 2005] A. KOROBKIN. Second-order wagner theory of wave impact. *Journal of Engineering Mathematics*, pages –, 2005.

- [Korobkin *et al.*, 2006] A. KOROBKIN, R. GUÉRET, and S. MALENICA. Hydroelastic coupling of beam finite element model with Wagner theory of water impact. *Journal of Fluids and Structures*, 22 :493–504, 2006.
- [Korobkin and Malenica, 2005] A. KOROBKIN and S. MALENICA. Modified Logvinovich model for hydrodynamic loads on asymmetric contours entering water. In *The 20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Spitzbergen, Norway*, 2005.
- [Korobkin and Scolan, 2006] A. KOROBKIN and Y.-M. SCOLAN. Three-dimensional theory of water impact. Part 2. linearized wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 549 :343–373, 2006.
- [Kvålsvold, 1994] J. KVÅLSVOLD. *Hydroelastic modelling of wetdeck slamming on multihull vessels*. PhD thesis, University of Trondheim (Norway), 1994.
- [Lacome, 1998] J. LACOME. *Analyse de la méthode particulaire SPH. Applications à la détonique*. PhD thesis, INSA Toulouse (France), 1998.
- [Leroyer, 2004] A. LEROYER. *Etude du couplage écoulement/mouvement pour des corps solides ou à déformation imposée par résolution des équations de Navier-Stokes. Contribution à la modélisation numérique de la cavitation*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes (France), 2004.
- [Logvinovich, 1969] G.V. LOGVINOVICH. Hydrodynamics of flows with free boundaries. *Kiev : Naukova Dumka*, 1969.
- [Lu *et al.*, 2000] C.H. LU, Y.S. HE, and G.X. WU. Coupled analysis of nonlinear interaction between fluid and structure during impact. *Journal of fluids and structures*, 14 :127–146, 2000.
- [Lucy, 1977] L. LUCY. A numerical approach to the testing to the fission hypothesis. *Astrophysical Journal*, 82 :1013–1024, 1977.
- [Mackie, 1962] A. MACKIE. A linearized theory of the water entry problem. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied mathematics*, 15 :137–151, 1962.
- [Malleron and Scolan, 2007] N. MALLERON and Y.-M. SCOLAN. A generalized Wagner model. application to asymmetric section in free fall. In *International Conference on Violent Flows, Fukuoka, Japan*, 2007.
- [Malleron *et al.*, 2007] N. MALLERON, Y.-M. SCOLAN, and A.A. KOROBKIN. Some aspects of a generalized wagner models. In *22th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies, Plitvice, Croatia*, 2007.
- [Maruzewski *et al.*, 2008] P. MARUZEWSKI, G. OGER, D. Le TOUZÉ, and J. BIDDISCOMBE. High performance computing 3D SPH model : sphere impacting the free surface of water. In *ERCRAFT SIG SPHERIC, 3rd International Workshop*, 2008.
- [Mei *et al.*, 1999] X. MEI, Y. LIU, and D.K.P. YUE. On the water impact of general two-dimensional sections. *Applied Ocean Research*, 21 :1–15, 1999.
- [Monaghan, 1994] J.J. MONAGHAN. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, 110, 1994.
- [Newman, 1977] J. N. NEWMAN. *Marine Hydrodynamics*. MIT Press, 1977.
- [Nichols *et al.*, 1980] B.D. NICHOLS, C.W. HIRT, and R.S. HOTCHKISS. SOLA-VOF : A solution algorithm for transient flow with multiple free boundaries. *Los Alamos National Lab Report*, LA-8355, 1980.
- [Oliver, 2002] J.M. OLIVER. *Water entry and related problems*. PhD thesis, University of Oxford (UK), 2002.

- [Oliver, 2007] J.M. OLIVER. Second order wagner theory for two-dimensional water-entry problems at small deadrise angles. *Journal of Fluid Mechanics*, 572 :59–85, 2007.
- [Pentecote *et al.*, 2003] N. PENTECOTE, D. KOHLGRÜBER, and A. KAMOULAKOS. Simulation of water impact problems using the smoothed particle hydrodynamics method. In *ICD*, 2003.
- [Pierson, 1950] J. PIERSON. The penetration of free surface by a wedge. *Stevens Institute of technology*, page 387, 1950.
- [Potapov *et al.*, 2008] S. POTAPOV, B. MAUREL, and A. COMBESCURE. SPH frameworks to model fluid shell interaction. In *ERCRAFT SIG SPHERIC, 3rd International Workshop*, 2008.
- [Press *et al.*, 1996] W.H. PRESS, S.A. TEUKOLSKY, W.T. VETTERLING, and B.P. FLANNE. *Numerical Recipes in Fortran 90, Second Edition*. Cambridge university Press, 1996.
- [Reddy *et al.*, 2003] D.N. REDDY, T. SCANLON, and K. CHENGI. Prediction of slam loads on wedge section using Computational Fluid Dynamics (CFD) techniques. In *24th Symposium on Naval Hydrodynamics, Fukuoka, Japan*, 2003.
- [Riccardi and Iafrati, 2004] G. RICCARDI and A. IAFRATI. Water impact of an asymmetric floating wedge. *Journal of engineering mathematics*, 49 :19–39, 2004.
- [Rompteaux and Vila, 1999] A. ROMPTEAUX and J. VILA. Calcul du tossage avec smart fluids, un code de calcul particulaire compressible. In *7ème journées de l’hydrodynamique, Marseille, France*, 1999.
- [Savander *et al.*, 2002] B.R. SAVANDER, S.M. SCORPIO, and R.K. TAYLOR. Steady hydrodynamics analysis of planing surface. *Journal of Ship Research*, 46 :248–279, 2002.
- [Scolan, 2002] Y.-M. SCOLAN. *Simulation numérique de l’impact vertical d’un corps élastique sur une surface fluide*. ESIM/GM/YMS/33.01, 2002.
- [Scolan, 2004] Y.-M. SCOLAN. Hydroelastic behaviour of a conical shell impacting on a quiescent-free surface of an incompressible liquid. *Journal of Sound and Vibration*, 277 :163–203, 2004.
- [Scolan, 2007] Y.-M. SCOLAN. Generalized Wagner model for 2D symmetric and elastic body. *Internal report, Lavrentiev Institute*, 2007.
- [Scolan *et al.*, 1999] Y.-M. SCOLAN, E. COCHE, T. COUDRAY, and E. FONTAINE. Etude analytique et numérique de l’impact hydrodynamique sur des carènes dissymétriques. In *7ème journées de l’hydrodynamique, Marseille, France*, 1999.
- [Scolan and Etienne, 2008] Y.-M. SCOLAN and S. ETIENNE. On the use of conformal mapping for the computation of hydrodynamic forces acting on bodies of arbitrary shape. part 1 : simply connected bodies. *Journal of Engineering Mathematics*, 60 :209–220, 2008.
- [Scolan and Korobkin, 2001] Y.-M. SCOLAN and A. KOROBKIN. Three-dimensional theory of water impact. Part 1. inverse wagner problem. *Journal of Fluid Mechanics*, 440 :293–326, 2001.
- [Scolan and Korobkin, 2003a] Y.-M. SCOLAN and A. KOROBKIN. Energy distribution from vertical impact of a three-dimensional body onto the flat free surface of an ideal fluid. *Journal of Fluids and Structures*, 17 :275–286, 2003.
- [Scolan and Korobkin, 2003b] Y.-M. SCOLAN and A.A. KOROBKIN. On energy argument applied to slamming of elastic body. In *Hydroelasticity in Marine Technology, Oxford, UK*, 2003.

- [Seddon and Moatamedi, 2006] C.M. SEDDON and M. MOATAMEDI. Review of water entry with applications to aerospace structures. *International Journal of Impact Engineering*, 32 :1045–1067, 2006.
- [Semenov and Iafrati, 2006] Y.A. SEMENOV and A. IAFRATI. On the nonlinear water entry problem of asymmetric wedges. *Journal of Fluid Mechanics*, 547 :231–256, 2006.
- [Sneddon, 1966] I.N. SNEDDON. *Mixed boundary value problem in potential theory*. North Holland, Amsterdam, 1966.
- [Sun, 2007] H. SUN. *A boundary element method applied to strongly nonlinear wave-body interaction problems*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim (Norway), 2007.
- [Sun and Faltinsen, 2007] H. SUN and O.M. FALTINSEN. Water impact of horizontal circular cylinders and cylindrical shells. *Applied Ocean Research*, 28 :299–311, 2007.
- [Takagi, 1996] K. TAKAGI. Influence of elasticity on hydrodynamic impact problem. *Hydrodynamics*, 14 :1347–1353, 1996.
- [Takewaki *et al.*, 1985] H. TAKEWAKI, A. NISHIGUCHI, and T. YABE. The Cubic-interpolated pseudo-particle (CIP) method for solving hyperbolic type equations. *Journal of Computational Physic*, 61 :261, 1985.
- [Takewaki and Yabe, 1987] H. TAKEWAKI and T. YABE. Cubic-interpolated pseudo-particle (CIP) method. Application to non-linear or multi dimensional problems. *Journal of Computational Physic*, 70 :355, 1987.
- [Tanizawa, 1998] K. TANIZAWA. A time-domain simulation method for hydroelastic impact problem. In *2nd International Conference on Hydroelasticity in marine technology*, Fukuoka, Japan, 1998.
- [Taylor, 1930] J.L. TAYLOR. Hydrodynamical inertia coefficients. *Philosophical Magazine*, 9 :161–183, 1930.
- [Theodorsen and Garrick, 1933] T. THEODORSEN and I.E. GARRICK. General potential theory of arbitrary wing sections. *NACA Rept.*, 452 :177–209, 1933.
- [Toyama, 1993] Y. TOYAMA. Two-dimensional water impact of unsymmetrical bodies. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 173 :285–291, 1993.
- [Tulin, 1957] M.P. TULIN. The theory of slender surface planing at high speeds. *Schiffstechnik*, 4 :125–133, 1957.
- [von Karman, 1929] T.H. von KARMAN. The impact of seaplane floats during landing. *NACA Report*, TN 321, 1929.
- [Vorus, 1996] W.S. VORUS. A flat cylinder theory for vessel impact and steady planing resistance. *Journal of ship research*, 40 :89–106, 1996.
- [Wagner, 1932] H. WAGNER. Über Stoss- und gleitvorgänge an der oberfläche von flüssigkeiten. *ZAMM*, 12, 1932.
- [Wanatabe, 1986] I. WANATABE. Analytical expression of hydrodynamic impact pressure by matched asymptotic expansion technique. *The West-Japan Society of Naval Architects*, 71, 1986.
- [Wilkinson *et al.*, 1968] J.P.D. WILKINSON, A.P. CAPPELLI, and R.N. SALZMAN. Hydroelastic interaction of shells of revolution during water impact. *AIAA Journal*, 6 :792–797, 1968.
- [Wilson, 1989] S.K. WILSON. *The mathematics of ship slamming*. PhD thesis, University of Oxford (UK), 1989.

- [Wu *et al.*, 2004] G.X. WU, H. SUN, and Y.S. HE. Numerical simulation and experimental study of water entry of a wedge in free fall motion. *Journal of Fluid and Structure*, 19 :277–289, 2004.
- [Xing-Kaeding *et al.*, 2004] Y. XING-KAEDING, G. JENSEN, and M. PERIC. *Numerical simulation of water entry of a horizontal circular cylinder. Hydrodynamics VI-Theory and Application*. A.A. Balkema Publisher, 2004.
- [Xu, 1998] L. XU. *A theory for asymmetrical vessel impact and steady planing*. PhD thesis, Dept. of NAME, University of Michigan (USA), 1998.
- [Xu *et al.*, 1998a] L. XU, A.W. TROESCH, and R. PETERSON. Asymmetric hydrodynamic impact and dynamic response of vessels. In *17th Int. Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Lisbon, Portugal*, 1998.
- [Xu *et al.*, 1998b] L. XU, A.W. TROESCH, and W.S. VORUS. Asymmetric vessel impact and planing hydrodynamics. *Journal of ship research*, 42, 1998.
- [Yang and Qiu, 2007] Q. YANG and W. QIU. Numerical solution of 2-D slamming problem with a CIP method. In *International conference on violent flows 2007, Fukuoka, Japan*, 2007.
- [Yettou *et al.*, 2007] E.M. YETTOU, A. DESROCHERS, and Y. CHAMPOUX. A new analytical model for pressure estimation of symmetrical water impact of a rigid wedge at variable velocity. *Journal of Fluid and Structure*, 23 :501–522, 2007.
- [Zhao and Faltinsen, 1992] R. ZHAO and O. FALTINSEN. Water entry of two-dimensional bodies. *Journal of Fluid Mechanics*, 246 :593–612, 1992.
- [Zhao and Faltinsen, 1998] R. ZHAO and O. FALTINSEN. Water entry of arbitrary axisymmetric bodies with and without flow separation. In *23th Symposium on Naval Hydrodynamics, Val de Reuil, France*, 1998.
- [Zhao *et al.*, 1996] R. ZHAO, O. FALTINSEN, and J. AARSNES. Water entry of arbitrary two-dimensional sections with and without flow separation. In *21th Symposium on Naval Hydrodynamics, Trondheim, Norway*, 1996.
- [Zhu, 2006] X. ZHU. *Application of the CIP method to strongly non-linear wave-body interaction problems*. PhD thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim (Norway), 2006.
- [Zhu *et al.*, 2005] X. ZHU, O.M. FALTINSEN, and C. HU. Water entry and exit of a horizontal circular cylinder. In *24th international conference on offshore mechanics and arctic engineering, Halkidiki, Greece*, 2005.